1- Limites e Funções Contínuas

Exemplos

1- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Se $(x_k, y_k) \to (a,b)$, então

$$f(x_k, y_k) = x_k \longrightarrow a = f(a,b)!$$

2- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1$, sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; é contínua em $\mathbb{R}^n$.

Se $x_k \to a$ em $\mathbb{R}^n$, então

$$f(x_k) = x_{1_k} \longrightarrow a_1 = f(a)!$$

3- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = c$ (constante) é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Se $(x_k, y_k) \to (a,b)$ então

$$f(x_k, y_k) = c = f(a,b) \quad !$$

— // —

<u>Nota</u>: Para estudar funções contínuas basta considerar às <u>funções escalares</u>, ou seja, as funções do tipo

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

De facto, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ou seja,

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)\big)$$

em que $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$, for uma função contínua em $a \in \mathbb{R}^n$, então, dada uma sucessão $x_k \to a$, tem-se

$$f(x_k) - f(a) \longrightarrow 0$$

Usando a desigualdade

$$|f_j(x_k) - f_j(a)| \leq \|f(x_k) - f(a)\| \leq$$

$\forall_{j=1,2,\dots,m}$

$$\leq |f_1(x_k) - f_1(a)| + \dots + |f_m(x_k) - f_m(a)|$$

Conclui-se que f é contínua em $\underline{\underline{a}}$ sse cada uma das componentes $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ for uma função contínua em $\mathbb{R}$.

Portanto, basta estudar as funções escalares.

— u —

<u>Exemplo:</u> A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = (x^2, xy, x-y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ porque as suas três componentes

$f_1(x,y) = x^2$; $f_2(x,y) = xy$, $f_3(x,y) = x-y$

são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$. !!!

— // —

<u>Exemplo:</u> $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \equiv \|(x,y)\|$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua na origem.

De facto, seja $(x_k, y_k) \to (0,0)$.

$$\left|f(x_k,y_k) - \underbrace{f(0,0)}_{=0}\right| = \sqrt{x_k^2+y_k^2} = \|(x_k,y_k)\|$$

Portanto, $f(x_k,y_k) \longrightarrow 0 = f(0,0)$. !!!

— // —

Será que que esta função é contínua em qualquer outro ponto de $\mathbb{R}^2$?

Note-se que este caso já não é simples porque não é fácil manipular a raiz quadrada.

No entanto, esta função pode ser vista como a composta de duas funções contínuas:

$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2 \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "q"] \arrow[rr, bend right, "f = r \circ q"'] & \mathbb{R}_+ \arrow[r, "r"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$f(x,y) = r\big(q(x,y)\big) \quad \text{em que}$$

$$q(x,y) = x^2+y^2 \qquad (q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$$

$$r(q) = \sqrt{q} \qquad (r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R})$$

A função q é contínua em $\mathbb{R}^2$ porque é a soma de dois produtos.

A função r é contínua em $\mathbb{R}_+$ como foi visto em CDI-I.

Resta saber se a composta de duas

funções contínuas é uma função contínua.

A resposta é sim !!!

FUNÇÃO COMPOSTA :

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

$$a \longmapsto g(a) \longmapsto f(g(a))$$

! Se g for contínua em $a \in \mathbb{R}^n$ e se f for contínua em $g(a) \in \mathbb{R}^p$, então $f \circ g$ é contínua em $a \in \mathbb{R}^n$.

De facto, seja $x_k \to a$ em $\mathbb{R}^n$.

Sendo g contínua em a, tem-se $g(x_k) \to g(a)$.

Sendo f contínua em $g(a)$,
tem-se

$$f(g(x_k)) \longrightarrow f(g(a)), \text{ ou seja,}$$

$$(f \circ g)(x_k) \longrightarrow (f \circ g)(a) \quad !!!$$

——— // ———

Usando este resultado (Teorema),
Conclui-se que a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
dada por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$
é contínua em $\mathbb{R}^2$.

——— // ———

<u>Exemplo:</u> $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

É claro que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ usando as propriedades das funções contínuas.

Será que f é contínua na origem $(0,0)$, ou seja, será que existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \,?$$

Dito de outra forma, será que se $\|(x_k, y_k)\| \to 0$, então

$$|f(x_k,y_k) - f(0,0)| = |f(x_k,y_k)| \to 0 \,?$$

$$|f(x_k,y_k)| = \left|\frac{x_k\, y_k}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}}\right| = \underbrace{\frac{|x_k|}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}}}_{\leq 1}\,|y_k|$$

Recorrendo à desigualdade

$$|x_k| \leq \|(x_k,y_k)\| = \sqrt{x_k^2+y_k^2},$$

tem-se

$$\frac{|x_k|}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}} \leq 1$$

e, portanto,

$$|f(x_k,y_k)| = \underbrace{\frac{|x_k|}{\sqrt{x_k^2+y_k^2}}}_{\leq 1}\,|y_k| \leq |y_k| \to 0 \; !!!$$

Exemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

É claro que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Neste caso as desigualdades

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

não ajudam!

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\,|y|}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1}$$

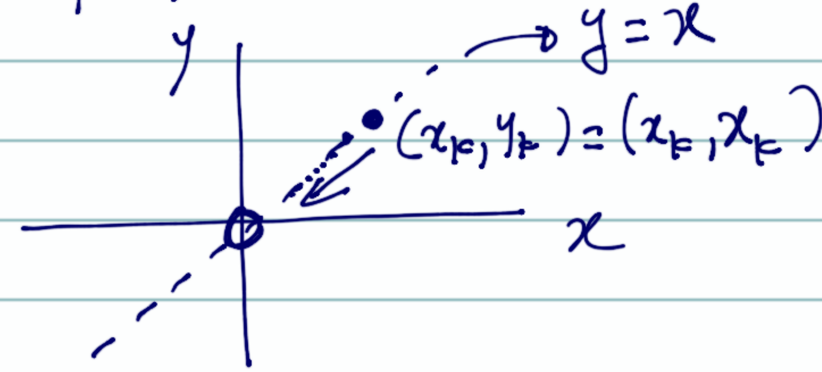
Pode admitir-se que o limite não existe!

Uma boa estratégia é tentar encontrar

uma sucessão $(x_k, y_k) \to (0,0)$ tal que

$$f(x_k, y_k)$$

não tem limite ou, se tiver, que seja diferente de $f(0,0) = 0$.



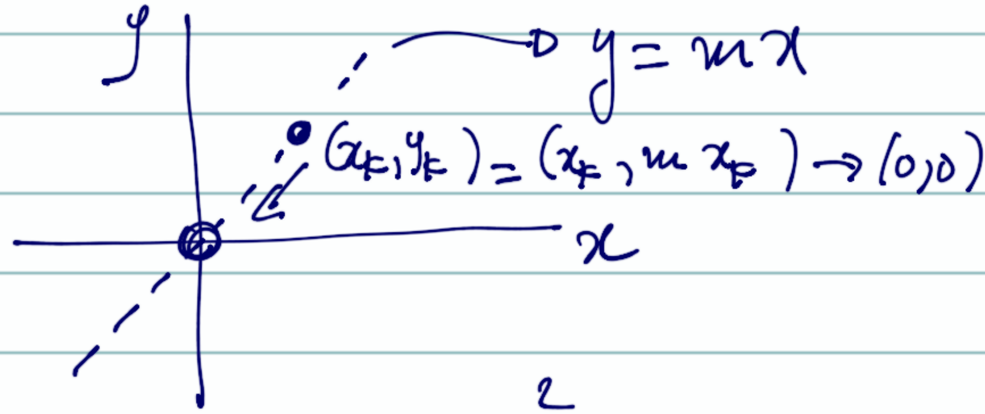
Para primeira tentativa, pode ser uma sucessão ao longo da reta $y = x$;

$$(x_k, y_k) = (x_k, x_k) \longrightarrow (0,0)$$

$$f(x_k, x_k) = \frac{x_k^2}{2x_k^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \; !!!$$

Portanto, a função f não é contínua na origem.

<u>Nota</u>: Se $(x_k, y_k) = (x_k, m x_k)$ $\quad (y = mx)$



ter-se-ia, $f(x_k, m x_k) = \dfrac{m x_k^2}{(1+m^2)x_k^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$;

ou seja, o limite depende da <u>direcção</u> em que a sucessão (x_k, y_k) se <u>encontra</u>.

— // —

<u>Exemplo</u>: Será que existe o limite seguinte:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+y^2} \ ?$$

Fazendo $f(x,y) = \dfrac{x^5}{x^4+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

tem-se

$$f(0,y) = \frac{0}{y^2} = 0 .$$

Se o limite existir deverá ser 0.

$$|f(x,y)-0| = |f(x,y)| = \frac{x^4 |x|}{x^4+y^2}$$

≤ 1

Nota: $x^4 \leq x^4 + y^2$

$$|f(x,y)| \leq |x| \longrightarrow 0$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+y^2} = 0$!

— " —

Exercício: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua na origem.