1- Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Exemplo: $\left(1, \frac{1}{k}, e^{-k}\right)$

$$\mathbb{N} \ni k \longmapsto (x_k, y_k, z_k) = \left(1, \frac{1}{k}, e^{-k}\right)$$

é uma sucessão em $\mathbb{R}^3$.
Cada uma das coordenadas é uma sucessão em $\mathbb{R}$.

É natural pensar que uma sucessão em $\mathbb{R}^n$ será convergente desde que cada uma das coordenadas seja convergente em $\mathbb{R}$.

No exemplo, deveremos ter:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1, \frac{1}{k}, e^{-k}\right) = (1, 0, 0).$$

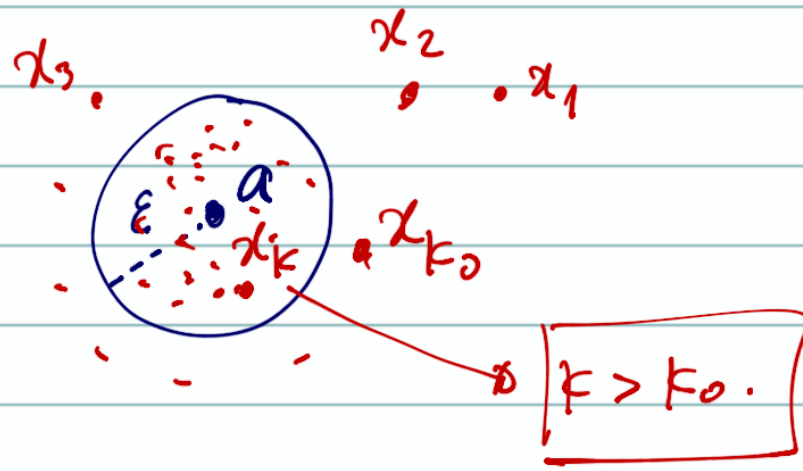
Será mesmo assim?

Seja (x_k) uma sucessão em $\mathbb{R}^n$. Diz-se que (x_k) é convergente e o seu limite é $a \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{k_0} \qquad k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \varepsilon$$

— || —

Dito de outro modo, dada uma bola qualquer centrada em a, existe uma ordem a partir da qual todos os termos restantes da sucessão encontram-se nessa bola.



— || —

Para entender este assunto basta pensar em sucessões em $\mathbb{R}^2$.

Pretende-se provar que uma sucessão (x_k, y_k), em $\mathbb{R}^2$, é convergente para (a,b) se e só se x_k converge para a e (y_k) converge para b:

$$(x_k, y_k) \underset{\text{em } \mathbb{R}^2}{\longrightarrow} (a,b) \quad \text{sse} \quad \begin{array}{l} x_k \to a \text{ em } \mathbb{R} \\ y_k \to b \text{ em } \mathbb{R}. \end{array}$$

Para isso, é necessário recorrer a uma desigualdade importante.

$$(|x|+|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \geq$$

$$\geq |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2 \geq$$

$$\geq x^2$$

Portanto,

$$x^2 \leq x^2+y^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

Aplicando a raiz quadrada, tem-se

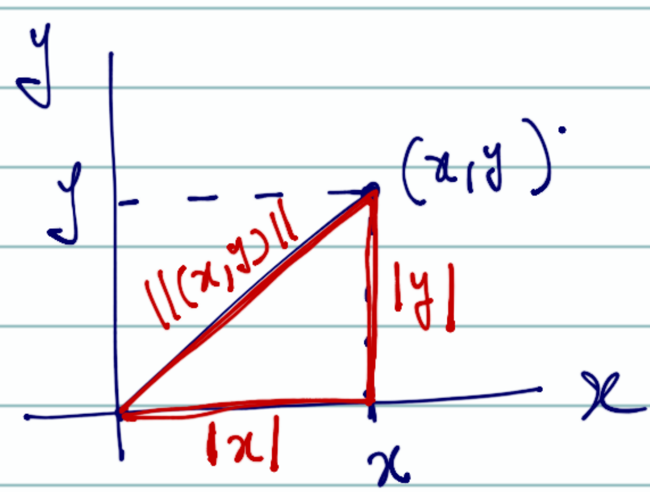
$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$$

ou seja,

$$|x| \leq \|(x,y)\| \leq |x|+|y|$$

Do mesmo modo, $\circledast$

$$|y| \leq \|(x,y)\| \leq |x|+|y|$$



Note-se que $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (a, b)$ quer dizer que

$$\lim_{k\to\infty}(x_k - a,\ y_k - b) = (0,0).$$

Tendo em conta a desigualdade (*)

$$|x_k - a| \leq \|(x_k - a, y_k - b)\| \leq |x_k - a| + |y_k - b|$$

$$|y_k - b| \leq \|(x_k - a, y_k - b)\| \leq |x_k - a| + |y_k - b|$$

Portanto, se $(x_k - a, y_k - b) \to (0,0)$, ou seja, se $\|(x_k - a, y_k - b)\| \to 0$, então $|x_k - a| \to 0$ e $|y_k - b| \to 0$, que quer dizer $x_k \to a$ e $y_k \to b$.

Por outro lado, se $x_k \to a$ e $y_k \to b$, então, $|x_k - a| \to 0$ e $|y_k - b| \to 0$

e dado que

$$\|(x_k - a, y_k - b)\| \leq |x_k - a| + |y_k - b| \to 0$$

Conclui-se que $(x_k, y_k) \to (a, b)$.

— u —

<u>Exemplos</u>:

1- $\left(1, \frac{1}{k}, e^{-k}\right) \to (1, 0, 0)$

2- $\left(k^2, 3, \frac{1}{k^2}\right)$ não é convergente.

porque a sucessão (k^2) em $\mathbb{R}$ não é convergente.

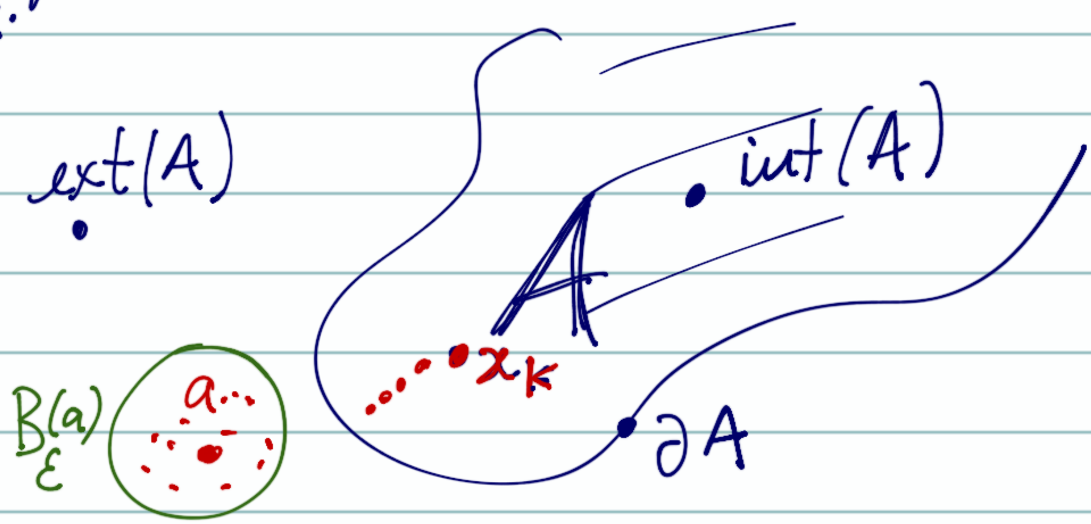
— u —

2 - Sucessões e conjuntos fechados

O conceito de sucessão convergente vai ajudar a caracterizar conjuntos fechados evitando o uso da noção de bola.

Um conjunto é fechado se $A \equiv \bar{A}$ em que $\bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial A$.

Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se a respectiva fronteira ∂A estiver contida em A.



Seja (x_k) uma sucessão com termos

em A e convergente: $x_k \to a$.

Se $a \in ext(A)$, existe uma bola $B_\varepsilon(a)$ tal que

$$B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset.$$

Dado que $x_k \to a$, deverá existir uma ordem k_0 tal que para todo $k > k_0$ se tem $x_k \in B_\varepsilon(a)$.

Ora isto não pode acontecer porque $x_k \in A$ e $B_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$.

Portanto, uma sucessão de termos em A e convergente terá o seu limite ou no interior de A ou na fronteira de A, ou seja, no fecho de A:

Se $x_k \to a$, então $a \in \bar{A}$.

Exercício: Qualquer ponto de $\bar{A}$ é limite de uma sucessão com termos em A.

Conclui-se assim que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é fechado sse qualquer uma das suas sucessões convergentes tem limite em A.

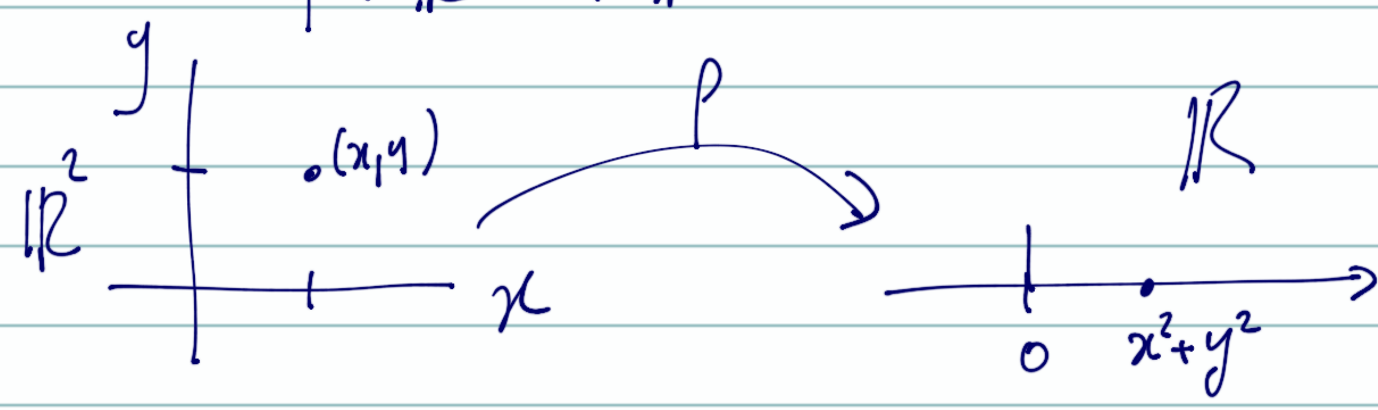
— // —

3 – Funções em $\mathbb{R}^n$:

Exemplos.

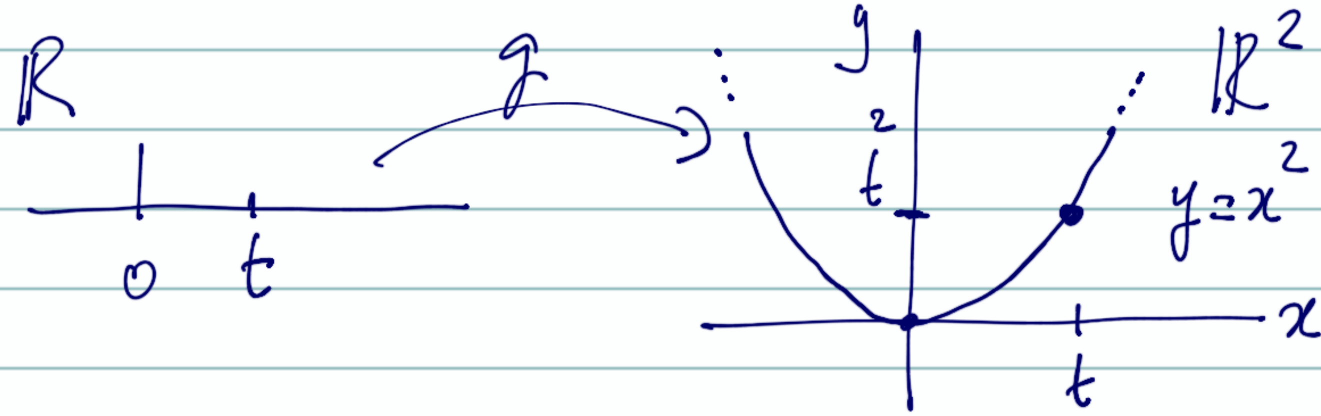
1 – $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$



2 – $g(t) = (t, t^2)$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$



3 – $f(x,y,z) = (x+y,\ x-z,\ y+z)$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

etc.

—— || ——

4 – Limites. Funções contínuas

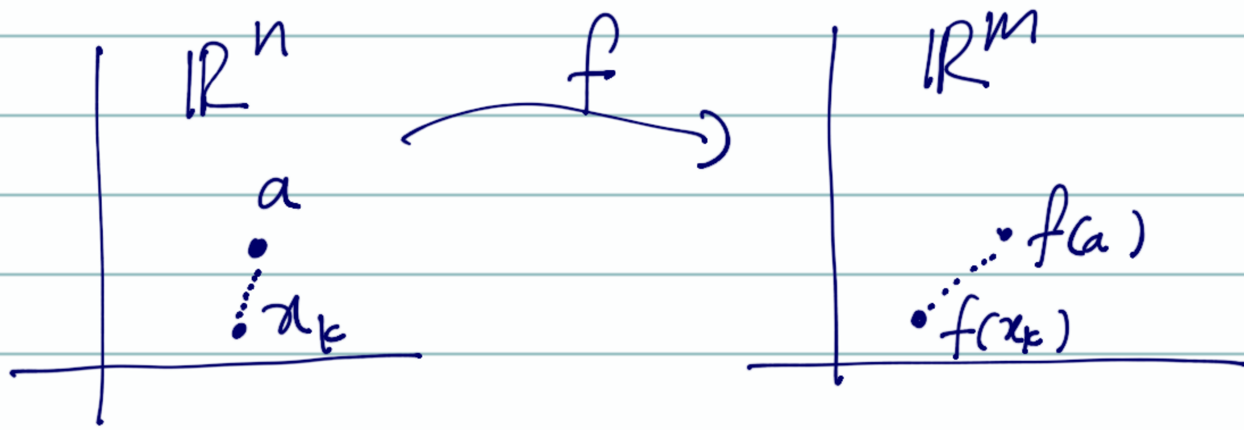
Recorde-se que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $a \in \mathbb{R}$ se dada uma sucessão (x_k) em $\mathbb{R}$ tal que $x_k \to a$, então $f(x_k) \to f(a)$.

Se $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ então $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.

ou

Se $|x_k - a| \to 0$ então $|f(x_k) - f(a)| \to 0$.

Para uma função $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a definição será uma adaptação desta substituindo o módulo pela norma.



Se $x_k \to a$ em $\mathbb{R}^n$, então $f(x_k) \to f(a)$ em $\mathbb{R}^m$.

Se $\|x_k - a\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$, então $\|f(x_k) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \to 0$

Para o cálculo de limites serão consideradas apenas as chamadas <u>funções escalares</u>, ou seja, funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

<u>Exemplo</u>. $f(x,y) = x^2 + y$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Usando as propriedades dos limites estudadas em CDI-I, tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = 4+1 = 5 = f(2,1).$$

<u>Exemplo</u>: $f(x,y) = x$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

A função f é contínua em $\mathbb{R}^2$. De facto seja $(x_k, y_k) \to (a,b)$. Então

$$f(x_k, y_k) = x_k \to a = f(a,b). !!!$$

Tendo em conta as propriedades dos limites em $\mathbb{R}$, conclui-se:

1 - Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então $f+g$, fg são também funções contínuas.

2 - Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g \neq 0$, são funções contínuas, então $\frac{f}{g}$ também é uma função contínua.

Exemplo: $f(x,y) = \dfrac{x^2y + y^3}{x^2+y^2}$

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$. $\quad (x^2+y^2>0)$

f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Tanto o numerador como o denominador são somas de produtos e o denominador é não nulo.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = \frac{2+8}{1+4} = 2 \;//.$$