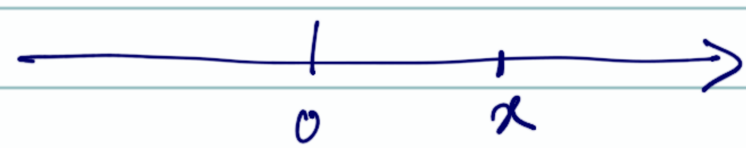
1 – Espaço $\mathbb{R}^n$.

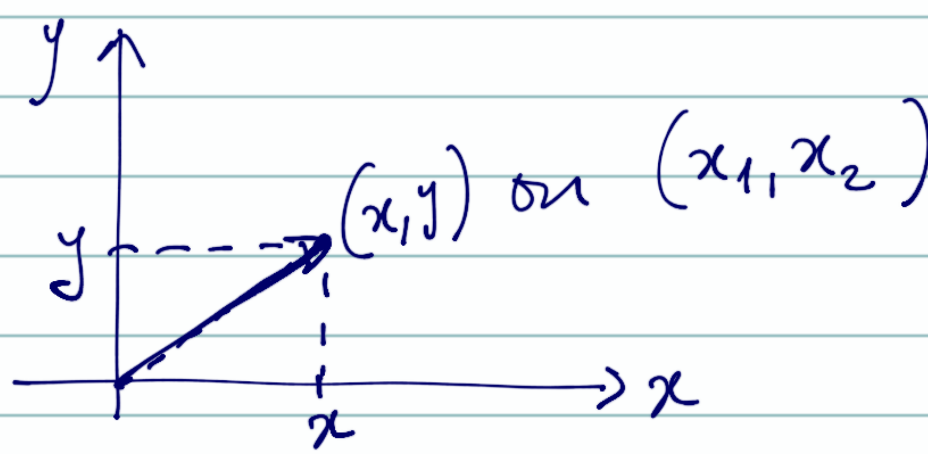
Pensando no problema da medição da temperatura na cidade de Lisboa facilmente concluímos sobre a necessidade do estudo de funções que dependem de várias variáveis.
A temperatura depende do ponto onde a possível medição é feita. Cada ponto é identificado por três coordenadas.

$$\mathbb{R}^n = \{ \overbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}^{n} : x_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, 2, \dots, n \}$$

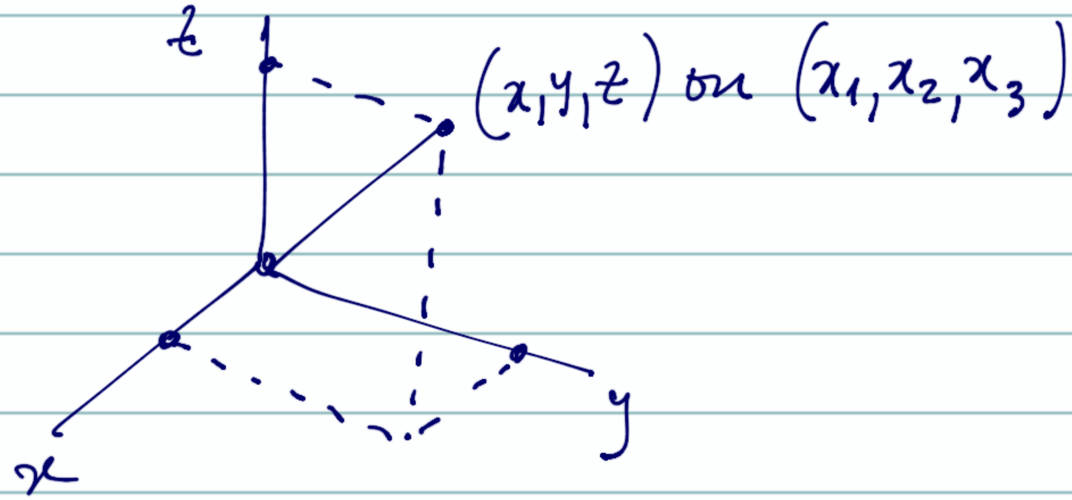
$n = 1$:



$n = 2$:



$n=3$



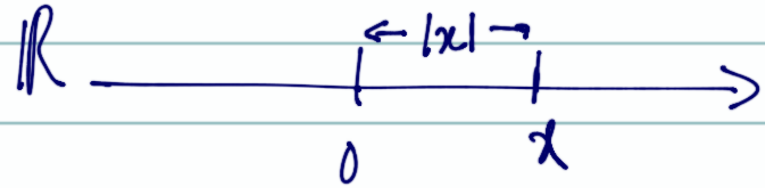
etc.

— n —

2 - Norma. Distância

O conceito de norma (distância) vai desempenhar um papel crucial no estudo de funções de várias variáveis tal como noção de módulo em $\mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$ → distância de x à origem.



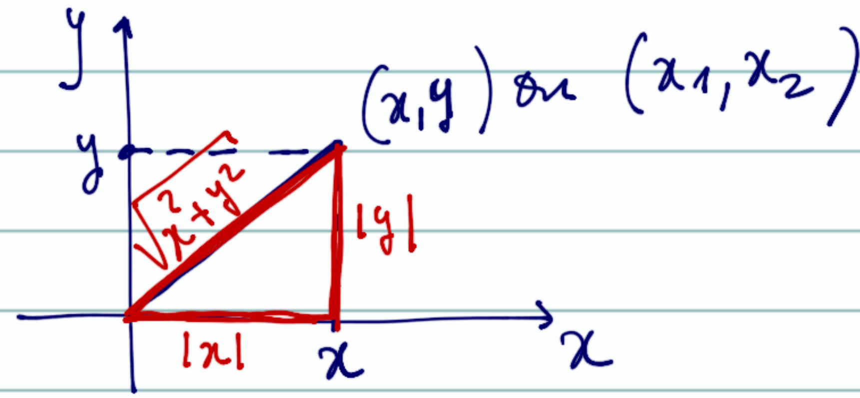
Norma em $\mathbb{R}^n$:

$x \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

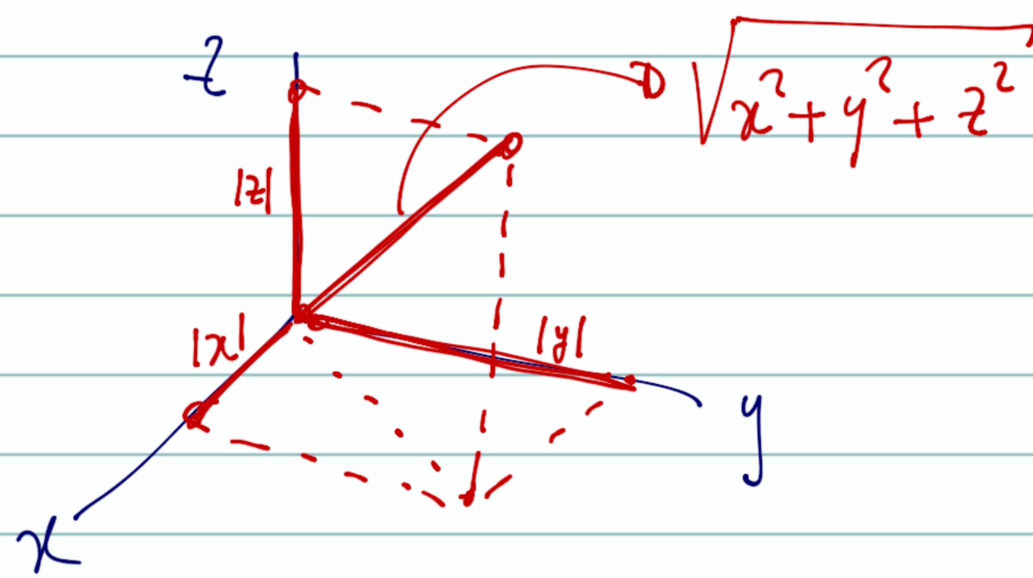
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

$n = 2$:



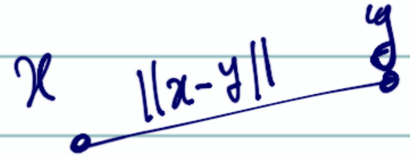
$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$n = 3$:



Em geral, $\|x\| \equiv$ distância de x à origem.

Distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$



$x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Exemplo: Distância entre os pontos $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$ em $\mathbb{R}^3$:

$$\sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{9+9+9}$$
$$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Nota: Para $n = 1$ $(\mathbb{R})$ tem-se

$$\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

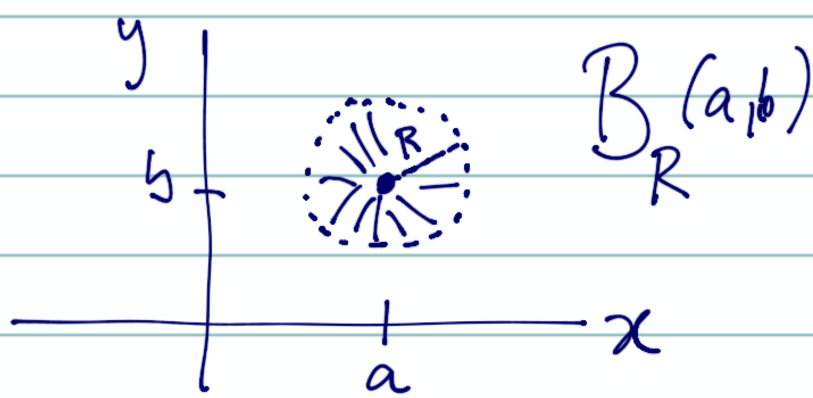
O módulo é a norma em $\mathbb{R}$.

3 – Bola aberta em $\mathbb{R}^n$

Chama-se bola (aberta), centrada no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio R, ao conjunto

$$B_R(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < R \}$$

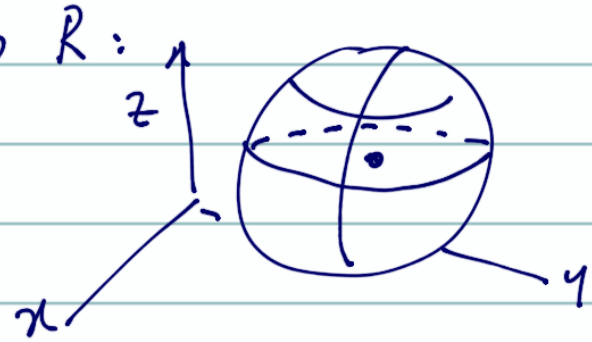
$n = 2$:



Bola em $\mathbb{R}^2$ centrada no ponto (a,b):

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < R \right\}$$

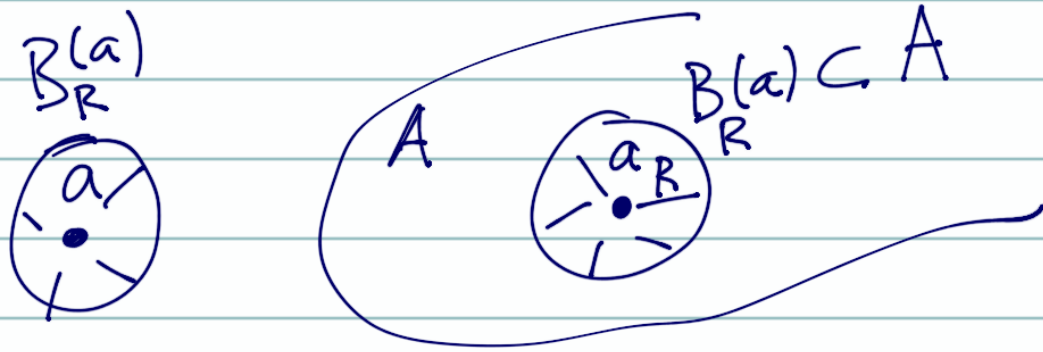
$n = 3$: Bola centrada no ponto (a,b,c) e raio R:



As noções de norma e bola serão importantes na definição de limite.

4- Interior, Exterior, Fronteira

Dado um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, podemos distinguir três tipos de pontos.



- Diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto interior de A se existir uma bola $B_R(a)$ contida em A:

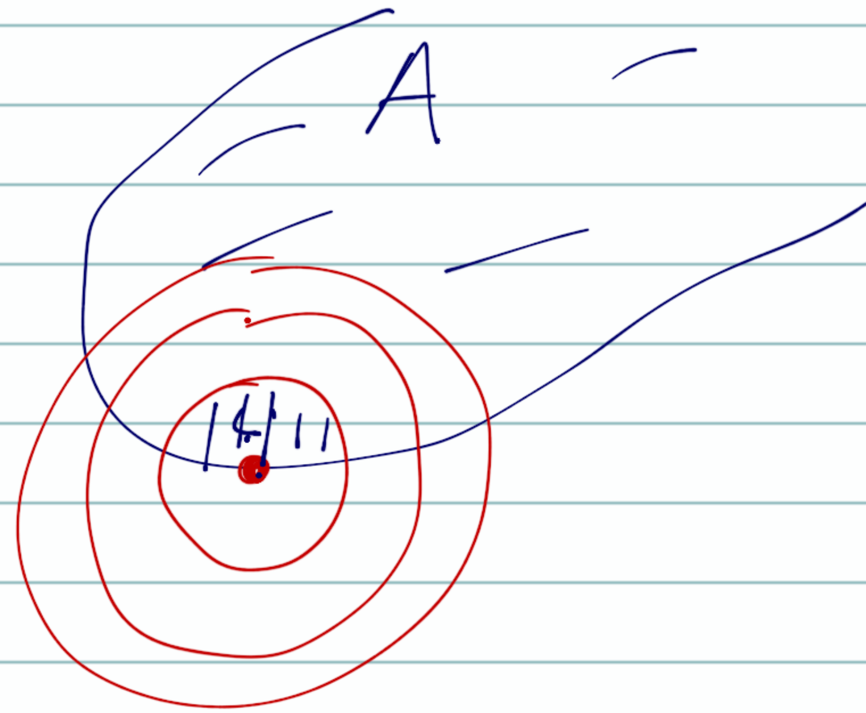
$$\exists_{R>0} : B_R(a) \subset A.$$

- Diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto do exterior de A se existir uma bola $B_R(a)$ contida no complementar de A:

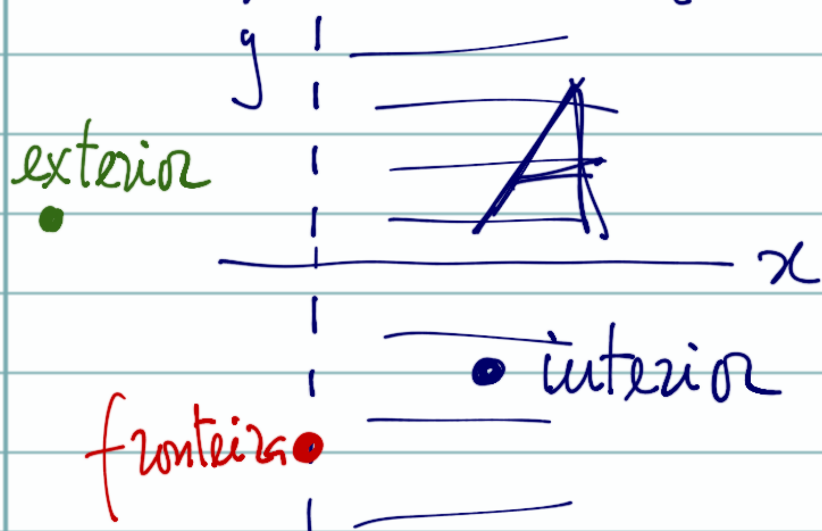
$$\exists_{R>0} : B_R(a) \cap A = \emptyset$$

- Diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto da <u>fronteira</u> de A se <u>qualquer</u> bola, centrada em a, intersecta A e intersecta o seu complementar:

$$\forall_{R>0} \; B_R(a) \cap A \neq \emptyset \quad \text{e}$$
$$B_R(a) \cap A^c \neq \emptyset$$



Exemplo: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

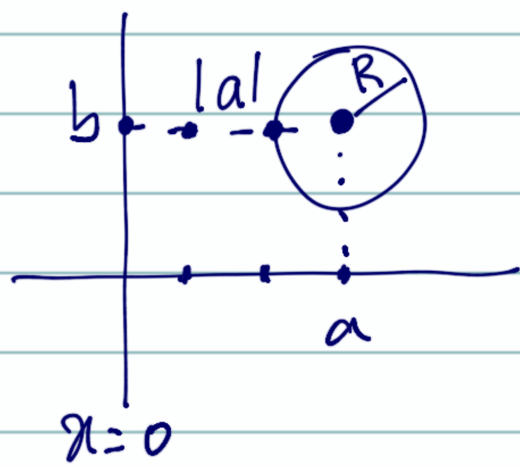


Interior de A: $\text{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

Exterior de A: $\text{ext}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$

Fronteira de A: $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

Nota: Neste exemplo é fácil determinar os três conjuntos porque o cálculo da distância de um ponto qualquer ao eixo Oy é simples.

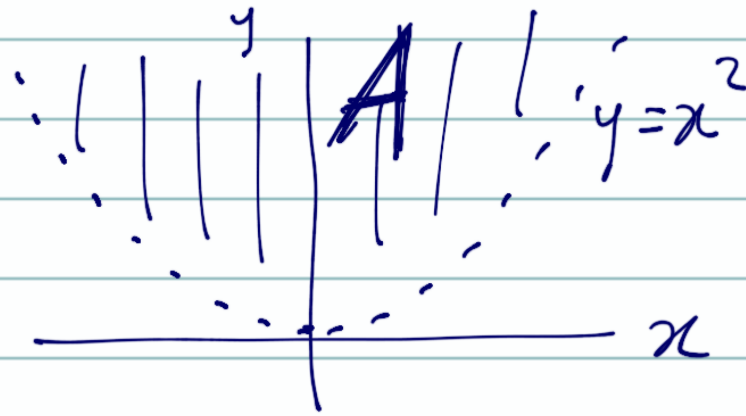


distância do ponto (a,b) ao eixo Oy.

$(a,b) \in \text{int}(A)$ porque a bola de raio $\frac{|a|}{3}$ e centro em (a,b) está contida em A.

Exercício: Determinar o interior, o exterior e a fronteira do conjunto:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$



- Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é $\boxed{\text{aberto}}$ se $A \equiv \text{int}(A)$. (todos os pontos de A são interiores).

- Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é $\boxed{\text{fechado}}$ se $A \equiv \text{int}(A) \cup \partial A$

- Ao conjunto $\text{int}(A) \cup \partial A$ chama-se <u>FECHO</u> de A e é usual representá-lo pelo símbolo $\bar{A}$.

$$\bar{A} = \text{int}(A) \cup \partial A.$$

Exercício: O conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ é fechado.

— // —

Nota: Por definição, é claro que os conjuntos $int(A)$, $ext(A)$ e ∂A são mutuamente disjuntos e

$$\mathbb{R}^n = int(A) \cup \partial A \cup ext(A).$$

— // —

5 - Sucessões em $\mathbb{R}^n$.

Tal como em $\mathbb{R}$, para chegar à noção de limite é conveniente saber o que é uma sucessão.

Em $\mathbb{R}$, uma sucessão é uma aplicação ou função que a cada natural $k \in \mathbb{N}$ faz corresponder um real x_k. Por exemplo, a sucessão $\left(\frac{1}{k}\right)$.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

$$\mathbb{N} \ni k \longmapsto \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$$

Em $\mathbb{R}^n$, de modo semelhante, uma sucessão é uma aplicação ou função que a cada natural $k \in \mathbb{N}$ faz corresponder um vector (ou ponto) $x_k \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{N} \ni k \longmapsto x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}) \in \mathbb{R}^n$$

(Cada componente do vector x_k faz parte de uma sucessão em $\mathbb{R}$.)

Exemplo: 1) $\left(\frac{1}{k}, e^{-k}\right)$ é uma sucessão em $\mathbb{R}^2$.

$$\left(1, \frac{1}{e}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{e^3}\right), \dots$$

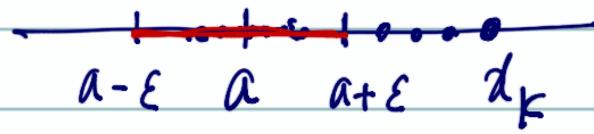
2) $\left(1, \frac{1}{k^2}, 2^k\right)$ é uma sucessão em $\mathbb{R}^3$.

— u —

6 - Limite de uma sucessão

Recorde-se que em $\mathbb{R}$, uma sucessão (x_k) é convergente e o seu limite é $a \in \mathbb{R}$ se

$$\forall_{\varepsilon > 0}\ \exists_{k_0 \in \mathbb{N}} : k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon .$$



Dado um intervalo qualquer centrado em a há uma ordem a partir da qual todos os termos restantes estão nesse intervalo, ou seja, "perto" do ponto a.

$$a = \lim_{k \to \infty} x_k .$$

Exercício: $x_k = \frac{1}{k}$. Para $\varepsilon = \frac{1}{10}$, determine a ordem k_0 tal que para $k > k_0$ se tem $|x_k| < \frac{1}{10}$.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0 \ !!!$$

Em $\mathbb{R}^n$, a definição de limite será semelhante usando a norma!

$\mathbb{R}$: $|\cdot|$ módulo

$\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|$ NORMA.

— // —