Conjuntos Densos

Definição

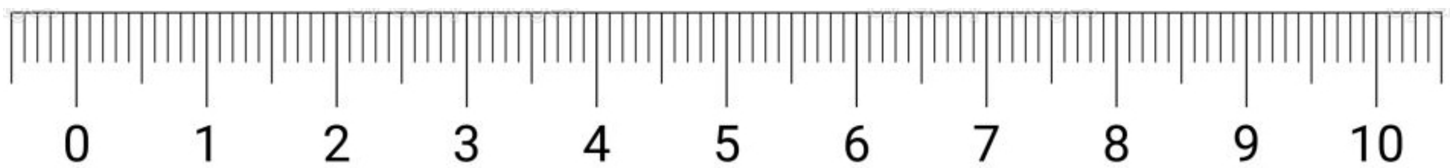
Um conjunto X diz-se denso se $\underset{a<b}{\forall}\ ]a,b[\,\cap X \neq \varnothing$.

Exemplos.

- $\mathbb{Z}$ não é denso pois $]0,1[\,\cap\,\mathbb{Z} = \varnothing$.
- $\mathbb{R}^+$ não é denso pois $]-1,0[\,\cap\,\mathbb{R}^+ = \varnothing$.
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ é denso.

Teorema

Os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ são ambos densos.

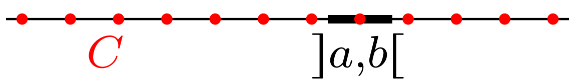


Demonstração

$\mathbb{Q}$ é denso.

Demonstração. Dado um intervalo $]a, b[$

- Tomamos $k > \frac{1}{b-a}$ $(k \in \mathbb{N})$. Então $\frac{1}{k} < b - a$.
- $C = \left\{\ldots, -\frac{3}{k}, -\frac{2}{k}, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n}{k} : n \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{Q}$
- A distância entre dois elementos consecutivos de C é $\frac{1}{k} < b - a$ logo $C \cap \,]a, b[\neq \emptyset$.



$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ é denso.

Demonstração. Dado um intervalo $]a, b[$

- Tomamos $k > \frac{1}{\sqrt{2}(b-a)}$ $(k \in \mathbb{N})$. Então $\frac{\sqrt{2}}{k} < b - a$.
- $C = \{n\frac{\sqrt{2}}{k} : n \in \mathbb{Z}\}$. Então $C \cap \,]a, b[\neq \emptyset$.
- $n\frac{\sqrt{2}}{k} \notin \mathbb{Q}$: se $n\frac{\sqrt{2}}{k} = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então $\sqrt{2} = \frac{rk}{ns} \in \mathbb{Q}$.

A Função de Dirichlet

Chamamos função de Dirichlet à função $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

A função de Dirichlet não é contínua em nenhum ponto $a \in \mathbb{R}$ porque:

- a é ponto de acumulação de $\mathbb{Q}$ e de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
- $\lim\limits_{x \to a} d|_{\mathbb{Q}}(x) = \lim\limits_{x \to a} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x \to a} d|_{\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}}(x) = \lim\limits_{x \to a} 0 = 0$
- Como $0 \neq 1$, não existe o $\lim\limits_{x \to a} d(x)$.