Aula de Hoje: Os números reais

Resultados Usados sem Demonstração

- Uma sucessão (x_n) monótona e limitada converge, isto é, existe $\lim x_n \in \mathbb{R}$
- Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ "sem buracos" é um intervalo. Mais precisamente:

  Se para quaisquer $x, y \in A$ temos $[x, y] \subset A$ então A é um intervalo.

Para provar estes resultados precisamos de estudar mais de perto os números reais.

Propriedades algébricas dos números reais

Um corpo é um conjunto onde estão definidas uma soma e uma multiplicação satisfazendo as propriedades seguintes:

- Comutatividade: $x + y = y + x$ e $xy = yx$
- Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(xy)x = x(yz)$
- Distributividade: $x(y + z) = xy + xz$
- Existência de elementos neutros 0 e 1: $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$
- Para cada x existe um simétrico $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.
- Para cada $x \neq 0$ existe um inverso x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Exemplo duma demonstração

Lei do corte

Se $a + c = b + c$ então $a = b$.

Demonstração. Adicionando $-c$ a ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned} & (a+c)+(-c) = (b+c)+(-c) \\ \Leftrightarrow \quad & a + \big(c+(-c)\big) = b + \big(c+(-c)\big) \\ \Leftrightarrow \quad & a + 0 = b + 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a = b \end{aligned}$$

$\square$

Exemplos de corpos

- $\mathbb{R}$ satisfaz os axiomas de corpo
- O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos também satisfaz os axiomas de corpo.
- Outro exemplo dum corpo com dois elementos:

$P =$ "pares" $\qquad I =$ "ímpares"

$$\begin{aligned} \text{Adição}: &\quad P+P=P, \quad P+I=I, \quad I+I=P \\ \text{Multiplicação}: &\quad P\cdot P=P, \quad P\cdot I=P, \quad I\cdot I=I \end{aligned}$$

$\{P, I\}$ é um corpo:

$$P=0, \quad I=1, \quad -P=P, \quad -I=I, \quad I^{-1}=I$$

Exemplo. O Corpo das Funções Racionais

- Para evitar exemplos como x/x, consideramos apenas quocientes de polinómios $p(x)/q(x)$ em que p e q não têm raízes em comum.
- Qualquer quociente de polinómios pode ser simplificado de modo a satisfazer esta condição.
- A soma e o produto de funções racionais é uma função racional
- As funções constantes iguais a 0 e 1 são funções racionais
- O simétrico de $p(x)/q(x)$ é $-p(x)/q(x)$
- O inverso de $p(x)/q(x)$ é $q(x)/p(x)$

Relação de ordem

Um corpo ordenado é um corpo em que existe uma noção de número positivo, satisfazendo as seguintes propriedades:

- A soma e o produto de números positivos são positivos.
- Cada x satisfaz uma e uma só das seguintes afirmações: Ou $x = 0$, ou x é positivo ou $-x$ é positivo.

Definição. Dizemos que $x > y$ se $x - y$ for positivo.

Teorema. $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$.
Demonstração. Ou x é positivo ou $-x$ é positivo.

- Se x for positivo, $x^2 > 0$.
- Se $-x$ for positivo, $(-x)^2 > 0$ logo $x^2 = (-x)^2 > 0$.

$\mathbb{C}$ não pode ser um corpo ordenado pois $i^2 = -1$.

Exemplos de Corpos Ordenados

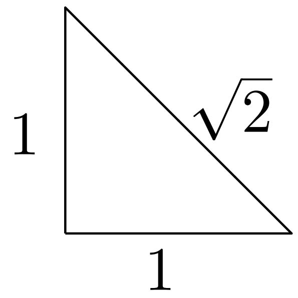
- $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.
- O corpo das funções racionais é um corpo ordenado: dizemos que uma função racional

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$

é positiva se $a_k/b_n > 0$, ou seja, se o limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$ for positivo ou 0^+.

Números irracionais

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo ordenado



Teorema

Não existe nenhum número racional p/q tal que $(p/q)^2 = 2$.

Demonstração. Assumimos que p e q são primos entre si.

- $p^2/q^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; p^2 = 2q^2$
- p^2 é par, logo p é par: $p = 2k$
- $4k^2 = 2q^2$
- $2k^2 = q^2$ logo q é par. $\square$

Teorema de Bolzano: $x^2 - 2$ tem uma raiz em $[1, 2]$.

Para provar o Teorema de Bolzano usámos a convergência de sucessões monótonas limitadas.

Majorantes, máximo e supremo

Definição. Dado um conjunto A,

- m é um majorante de A se $x \leqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \max A$ se $m \in A$ e m é um majorante
- O *supremo* de A é o menor dos majorantes de A.
- Um conjunto sem majorantes tem supremo $+\infty$.

Exemplo. $A = [-1, 3]$

- Conjunto dos majorantes de A: $[3, +\infty[$.
- $\max A = 3$.
- $\sup A = 3$.
- $\sup \mathbb{R} = +\infty$.

Majorantes, máximo e supremo

Definição. Dado um conjunto A,

- m é um majorante de A se $x \leqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \max A$ se $m \in A$ e m é um majorante
- O *supremo* de A é o menor dos majorantes de A.
- Um conjunto sem majorantes tem supremo $+\infty$.

Exemplo. $A =]-\infty, 1[$.

- A não tem máximo:
  - $m < 1 \qquad x = (m+1)/2 \qquad m < x < 1.$
- Conjunto dos majorantes de A: $[1, +\infty[$
- $\sup A = 1$

Minorantes, mínimo e ínfimo

Definição. Dado um conjunto A,

- m é um *minorante* de A se $x \geqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \min A$ se $m \in A$ e m é um minorante
- O *ínfimo* de A é o maior dos minorantes de A.
- Um conjunto sem minorantes tem ínfimo $-\infty$.

Exemplo. $A =]0, 1[\cup \{2\}$

- Majorantes: $[2, +\infty[$. Minorantes: $]-\infty, 0]$
- $\max A = \sup A = 2$. $\inf A = 0$. A não tem mínimo.

Algumas observações:

- Se $\sup A \in A$ então $\sup A = \max A$.
- Se $\sup A \notin A$ então A não tem máximo.

Minorantes, mínimo e ínfimo

Definição. Dado um conjunto A,

- m é um *minorante* de A se $x \geqslant m$ para todo o $x \in A$
- $m = \min A$ se $m \in A$ e m é um minorante
- O *ínfimo* de A é o maior dos minorantes de A.
- Um conjunto sem minorantes tem ínfimo $-\infty$.

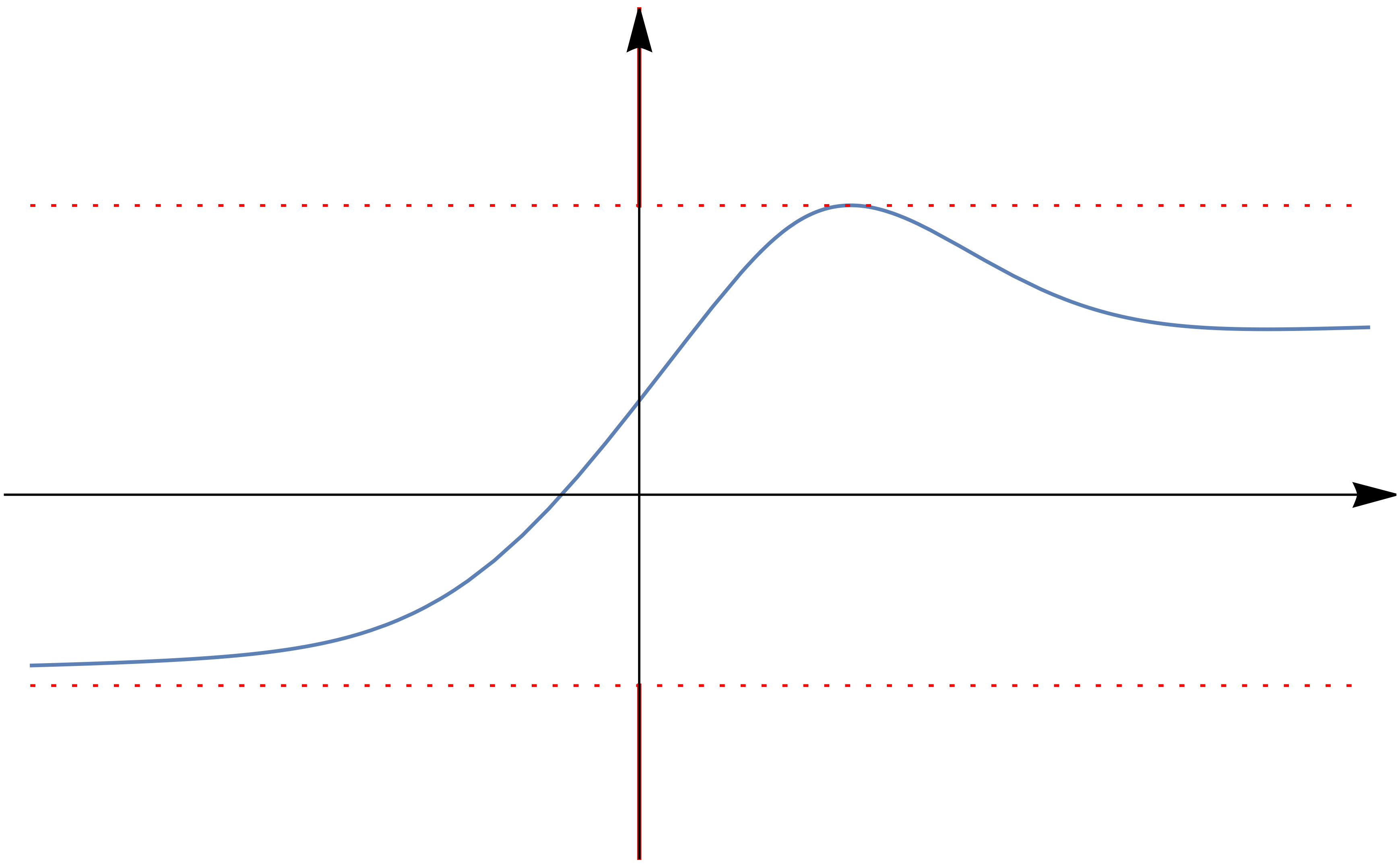
Exemplo. $A =]0,1[\cup \{2\}$

- Majorantes: $[2,+\infty[$. Minorantes: $]-\infty,0]$
- $\max A = \sup A = 2$. $\inf A = 0$. A não tem mínimo.

Algumas observações:

- Se $\inf A \in A$ então $\inf A = \min A$.
- Se $\inf A \notin A$ então A não tem mínimo.

Exemplo. Funções



Caracterização do supremo

Teorema

Seja $s \in \mathbb{R}$ um majorante dum conjunto X. Então:

$$s = \sup X \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\delta>0}{\forall} \; \underset{x\in X}{\exists} \; s - x < \delta \,.$$

Demonstração. Primeiro provamos ($\Rightarrow$). Se $s = \sup X$

- $\forall_{\delta>0}$ $s - \delta$ não é um majorante
- É falso que $x \leqslant s - \delta$ para todo o $x \in X$
- Existe um $x \in X$ tal que $x > s - \delta$
- $s - x < \delta$.

Caracterização do supremo

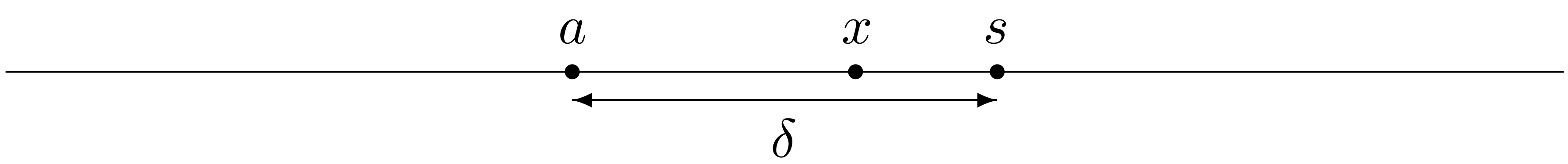
Teorema

Seja $s \in \mathbb{R}$ um majorante dum conjunto X. Então:

$$s = \sup X \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{x\in X}{\exists} \ s - x < \delta\,.$$

Demonstração. Agora provamos $(\Leftarrow)$.

- Queremos mostrar que s é o menor dos majorantes de X
- Vamos mostrar que se $a < s$ então a não é um majorante.
- Seja $\delta = s - a > 0$. Então existe um $x \in X$ tal que $s - x < \delta$
- $a < x$, logo a não é um majorante de X.



Caracterização do supremo

Teorema

Seja $s \in \mathbb{R}$ um majorante dum conjunto X. Então:

$$s = \sup X \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{x\in X}{\exists} \ s - x < \delta \,.$$

Seja $t \in \mathbb{R}$ um minorante de X. Então:

$$t = \inf X \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{x\in X}{\exists} \ x - t < \delta \,.$$

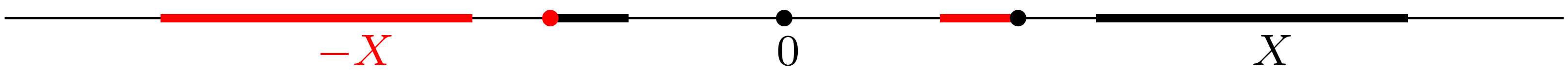
Existência do supremo

Axioma do supremo

Um conjunto não vazio e majorado tem supremo.

Teorema. Qualquer conjunto X minorado tem ínfimo.

Demonstração. $-X = \{-a : a \in X\}$.
Então $\sup(-X) = -\inf X$.



Sucessões Monótonas Limitadas

Teorema

Qualquer sucessão (x_n) monótona e limitada converge.

- Se (x_n) for crescente:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}\,.$$

- Se (x_n) for decrescente:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}\,.$$

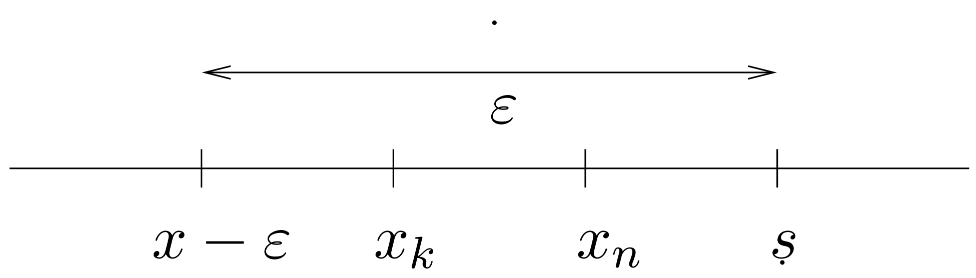
Demonstração

Caso em que (x_n) é crescente e limitada.

- Seja $s = \sup\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Queremos mostrar que:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ n > \frac{1}{\delta} \ \Rightarrow \ |s - x_n| < \varepsilon$$

- Existe um $x_k \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ tal que $s - x_k < \varepsilon$.
- Se $n > k$, temos $x_k \leqslant x_n$, logo: $s - x_n \leqslant s - x_k < \varepsilon$.
- $n > k \ \Rightarrow \ |s - x_n| < \varepsilon$ logo basta tomar $\frac{1}{\delta} = k$.



Dízimas Infinitas

- A uma dízima infinita $a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$ está associada a sucessão crescente:

$$x_0 = a_0 \ , \ \ x_1 = a_0{,}a_1 \ , \ \ x_2 = a_0{,}a_1a_2 \ , \ \ x_3 = a_0{,}a_1a_2a_3 \ , \ \ \ldots$$

- $a_0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots = \lim x_k = \sup\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
- Exemplo: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$

  $= \sup\{1 \ , \ 1{,}4 \ , \ 1{,}41 \ , \ 1{,}414 \ , \ 1{,}4142 \ , \ 1{,}41421 \ , \ \ldots \}$

Números racionais $\longleftrightarrow$ Dízimas infinitas periódicas

Números irracionais $\longleftrightarrow$ Dízimas infinitas não periódicas

Exemplo. $0{,}1001000100001000001\ldots$ é irracional.

Outras Consequências do Axioma do Supremo

Teorema. O conjunto $\mathbb{N}$ não é majorado.

Demonstração. Provamos por contradição.

- Assumimos que $\mathbb{N}$ é majorado.
- Então existe $s = \sup \mathbb{N}$.
- $s - 1$ não é majorante de $\mathbb{N}$.
- Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > s - 1$.
- $n + 1 > s$ logo s não é um majorante: contradição.

Nota. No corpo das funções racionais $\mathbb{N}$ é majorado: por exemplo x é um majorante de $\mathbb{N}$.

Intervalos

Teorema. Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto tal que $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subset A$ então A é um intervalo com extremos $\sup A$ e $\inf A$.

Demonstração.

- Vamos mostrar que $]\inf A, \sup A[\subset A$.
- Dado um ponto b tal que $\inf A < b < \sup A$ existem $x, y \in A$ tais que $\inf A \leqslant x < b < y \leqslant \sup A$.
- $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subset A \Rightarrow b \in A$
- $]\inf A, \sup A[\subset A \subset [\inf A, \sup A]$ logo A é um intervalo com extremos $\sup A$ e $\inf A$.