Aula de Hoje: Indução

Demonstrações por indução

Exemplo. $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2n$:

- $x_2 = x_1 + (2 \times 1) = 1 + 2 = 3$
- $x_3 = x_2 + (2 \times 2) = 3 + 4 = 7$
- $x_4 = x_3 + (2 \times 3) = 7 + 6 = 13$

Será que x_n é sempre ímpar?

$2n$ é par, logo $x_{n+1} = x_n +$ (número par)

- x_1 é ímpar logo $x_2 = x_1 +$ (n° par) é ímpar,
- x_2 é ímpar logo $x_3 = x_2 +$ (n° par) é ímpar,
- x_3 é ímpar logo $x_4 = x_3 +$ (n° par) é ímpar,

$$\vdots$$

Demonstrações por indução

- $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2n$
- Consideremos a afirmação: $\quad P_n =$ "x_n é ímpar"

Para mostrar que P_n é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

- mostramos que P_1 é verdadeira;
- mostramos que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

- Caso $n = 1$: $P_1 =$ "x_1 é ímpar". Verdadeira pois $x_1 = 1$.
- Hipótese: x_n é ímpar; Tese: x_{n+1} é ímpar.
- Demonstração: $2n$ é par e, por hipótese, x_n é ímpar.
- $x_{n+1} = x_n + 2n$. A soma dum número ímpar com um número par é ímpar logo x_{n+1} é ímpar.
- Provámos que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Por indução fica provado que P_n é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo

- P_1 é verdadeira;
- $\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Exemplo. Provar que $(1+a)^n \geqslant 1+na$ para $n\in\mathbb{N}$ e $a\geqslant -1$.

- Caso $n=1$: $(1+a)^1 \geqslant 1+1\cdot a$ Proposição Verdadeira
- Hipótese: $(1+a)^n \geqslant 1+na$
- Tese: $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$
- $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+a)(1+na)$
- Falta ver que $(1+a)(1+na) \geqslant 1+(n+1)a$
- $1+na+a+na^2 \geqslant 1+na+a \quad$ porque $\quad na^2 \geqslant 0$

Provámos: $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+a)(1+na) \geqslant 1+(n+1)a$

Justificação do Método de Demonstração por Indução

- O que são números naturais?
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ não é uma definição rigorosa.

Um conjunto X diz-se indutivo se: $\quad x \in X \;\Rightarrow\; x + 1 \in X.$

O conjunto $\mathbb{N}$ deverá ser indutivo mas há muitos outros exemplos:

- $]0, +\infty[$ é indutivo.
- $\{1, 2, 3\} \cup [4, +\infty[$ é indutivo.

Definição

$\mathbb{N}$ é o menor conjunto indutivo que contém 1.

Justificação do Método de Demonstração por Indução

Para mostrar que uma afirmação P_n é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

- mostramos que P_1 é verdadeira;
- mostramos que $\underset{n \in \mathbb{N}}{\forall} P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

Se $X = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ é verdadeira}\}$

- X é indutivo: $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$ porque $P_n \Rightarrow P_{n+1}$
- $1 \in X$ porque P_1 é verdadeira

$X = \mathbb{N}$ porque $\mathbb{N}$ é o menor conjunto indutivo que contem 1.
Logo P_n é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.