Aula de Hoje: Decomposição em fracções simples

Quocientes de Polinómios

- Chamamos função racional a um quociente de polinómios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

- Uma função racional pode ser escrita como uma soma de funções mais simples, chamadas de fracções simples.
- Exemplo.

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1+x-x}{x(x+1)} = \frac{1+x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

- Vamos assumir para já que o grau de $p(x)$ é inferior ao de $q(x)$ e que $q(x)$ se encontra factorizado.

Decomposição em Fracções Simples

A cada fator do denominador associamos uma soma de frações simples de acordo com a tabela

$x - a$	$\dfrac{A}{x-a}$
$Q(x)$	$\dfrac{Bx + C}{Q(x)}$
$(x-a)^n$	$\dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \dfrac{A_n}{(x-a)^n}$
$Q(x)^n$	$\dfrac{A_1x + B_1}{Q(x)} + \dfrac{A_2x + B_2}{Q(x)^2} + \cdots + \dfrac{A_nx + B_n}{Q(x)^n}$

$Q(x)$ representa um polinómio de grau 2 sem raízes.

Exemplo

Vamos decompor $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-4)}$ em fracções simples:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{(x+1)(x-4)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} \\
&= \frac{A(x-4)+B(x+1)}{(x+1)(x-4)} \\
x-1 &= A(x-4)+B(x+1) \\
x=4: \qquad 4-1 &= A(4-4)+B(4+1) \;\Leftrightarrow\; 3 = 5B \\
x=-1: \qquad -1-1 &= A(-1-4)+B(-1+1) \;\Leftrightarrow\; -2 = -5A
\end{aligned}$$

Substituindo $A = \frac{2}{5}$ e $B = \frac{3}{5}$:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-4)} = \frac{2/5}{x+1} + \frac{3/5}{x-4}\,.$$

Vamos decompor $\dfrac{2x^2+4x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$ em fracções simples:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+4x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+x+1)} \\
2x^2+4x &= (Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+1)
\end{aligned}$$

Igualando potências de x:

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad 0 = A \phantom{{}+B} + C \\
x^2 &: \quad 2 = A + B \phantom{{}+C} + D \\
x \ &: \quad 4 = A + B + C \\
x^0 &: \quad 0 = \phantom{A+{}} B \phantom{{}+C} + D \,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 :&\quad 0 = A \qquad\quad + C \\ x^2 :&\quad 2 = A + B \qquad\quad + D \\ x \;\; :&\quad 4 = A + B + C \\ x^0 :&\quad 0 = \qquad\; B \qquad\quad + D \,. \end{aligned}$$

Substituindo $C = -A$ e $D = -B$ na segunda e na terceira equações, obtemos

$$\begin{aligned} 2 = A + B - B = A \\ 4 = A + B - A = B \end{aligned}$$

Assim, $A = 2$, $B = 4$, $C = -2$ e $D = -4$:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 4x}{(x^2+1)(x^2+x+1)} &= \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{2x + 4}{x^2 + 1} + \frac{-2x - 4}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

Vamos decompor $\dfrac{2x^3-1}{x(x-1)^3}$ em fracções simples:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3-1}{x(x-1)^3} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \\
&= \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3} \\
2x^3 - 1 &= A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx \\
-1 &= A(-1)^3 \;\Leftrightarrow\; A = 1 \\
2 \cdot 1^3 - 1 &= D \;\Leftrightarrow\; D = 1 \\
2x^3 - 1 &= (x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + x
\end{aligned}$$

Igualando potências de x e usando $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$:

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad 2 = 1 + B \\
x^2 &: \quad 0 = -3 - 2B + C \\
x &: \quad 0 = 3 + B - C + 1 \\
x^0 &: \quad -1 = -1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x^3 &: \quad 2 = 1 + B \;\Leftrightarrow\; B = 1 \\
x^2 &: \quad 0 = -3 - 2B + C \\
x &: \quad 0 = 3 + B - C + 1
\end{aligned}
$$

A segunda equação diz-nos que $C = 3A + 2B = 5$.
$A = B = D = 1$, $C = 5$:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^3 - 1}{x(x-1)^3} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

Queremos decompor $\dfrac{2x^5+4x^3-2}{x^4-1}$ em fracções simples.
Como o grau do numerador é maior que o grau do denominador, começamos por dividir os polinómios:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^5 & +4x^3 & & -2 & x^4-1 \\ \cline{5-5} -2x^5 & & +2x & & 2x \\ \cline{1-4} & +4x^3 & +2x & -2 & \end{array}$$

Assim:

$$\frac{2x^5+4x^3-2}{x^4-1}=2x+\frac{4x^3+2x-2}{x^4-1}$$

Factorizando o denominador:

$$x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$\frac{4x^3+2x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$
$$=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

Igualando os numeradores

$4x^3+2x-2 = A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)$

Tomando $x=1$ e $x=-1$:

$$4\cdot 1^3+2\cdot 1-2 = A(1+1)(1^2+1) \iff 4 = 4A$$
$$4\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)-2 = B(-1-1)\big((-1)^2+1\big) \iff -8 = -4B$$

logo $A=1$ e $B=2$. Igualando potências de x:

$$x^3: \qquad 4 = A+B+C = 1+2+C \iff C=1$$
$$x^0: \quad -2 = A-B-D = 1-2-D \iff D=1$$

$A=C=D=1$, $B=2$ e portanto,

$$\frac{4x^3+2x-2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}$$

Demonstração da Decomposição

Algumas observações:

- A soma de funções racionais é uma função racional:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)q_2(x) + p_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)}$$

- O produto de funções racionais é uma função racional:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} \cdot \frac{p_2(x)}{q_2(x)} = \frac{p_1(x)p_2(x)}{q_1(x)q_2(x)}$$

Se a é um zero de $q(x)$ com multiplicidade n dizemos que $p(x)/q(x)$ tem um polo de ordem n em a.

Reduzindo o Número de Polos

Uma função racional f com um polo de ordem n em a pode ser escrita na forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)(x-a)^n}$, com $q(a) \neq 0$.
Se $T(x)$ é o polinómio de Taylor de $p(x)/q(x)$ em a:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = T(x) + \frac{f^{(n)}(c_x)}{(n)!}(x-a)^n$$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)(x-a)^n} = \frac{T(x)}{(x-a)^n} + \frac{f^{(n)}(c_x)}{(n)!}$$

$f_1(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} = f(x) - \frac{T(x)}{(x-a)^n}$ é uma função racional
Escrevendo $T(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_{n-1}(x-a)^{n-1}$:

$$f(x) = \frac{c_0}{(x-a)^n} + \frac{c_1}{(x-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x-a} + f_1(x)$$

$\lim_{x\to a} f_1(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$: $\quad f_1$ tem menos um polo do que f.

Polinómios sem Raízes Reais

Exemplo. $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

$$\begin{aligned} \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i} &= \frac{Ax + Ai + Bx - Bi}{(x-i)(x+i)} \\ &= \frac{(A+B)x + (Ai - Bi)}{x^2+1} \end{aligned}$$

que é da forma $\dfrac{Cx + D}{x^2+1}$ com $C = A + B$ e $D = Ai - Bi$.

Primitivação de Fracções Simples

- Vamos primitivar $\dfrac{x+1}{x^2+1}$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctan x$$

- Vamos primitivar $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ com $a \in \mathbb{R}$ uma constante.

$$\frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{(x^2/a^2)+1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1/a}{(x/a)^2+1}$$

pelo que

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

Vamos primitivar $\displaystyle\int \frac{2x+4}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1 \quad (a = \tfrac{1}{2})$$

$$= \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}$$

Substituindo $y = x + \frac{1}{2}$, $x = y - \frac{1}{2}$:

$$\int \frac{2x+4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2(y-\frac{1}{2})+4}{y^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2y+3}{y^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \ln|y^2 + \tfrac{3}{4}| + 3\,\tfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}y\right)$$

$$= \ln|(x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}| + \tfrac{6}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2})\right)$$