Aula de Hoje: Séries de Taylor

# Continuidade duma Série de Potências

## Teorema (Abel)

Uma função definida por uma série de potências:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

é contínua no seu domínio de convergência.

# Derivada duma Série de Potências

**Teorema**

Uma série de potências $\sum c_k(x-a)^k$ com raio de convergência $R$ é diferenciável em $]a-R, a+R[$, com derivada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\,(x-a)^{k-1}\,.$$

Exemplos.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} x)' &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)' \\
&= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \ldots = \cos x\,; \\
(\cos x)' &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)' \\
&= 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \ldots = -\operatorname{sen} x\,.
\end{aligned}$$

# Demonstração (Caso $a = 0$)

Começamos por ver que $\sum c_k k\, x^{k-1}$ converge absolutamente em $]-R, R[$. Dado $x \in \,]-R, R[$, tomamos um $b$ tal que $|x| < b < R$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|c_k k\, x^k|}{|c_k b^k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{(\,b/|x|\,)^k} = 0\,.$$

$\sum |c_k b^k|$ converge logo $\sum |c_k k\, x^k|$ também converge, pelo que $\sum c_k k\, x^k$ converge absolutamente.

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, t^{k-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x c_k\, k\, t^{k-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[c_k t^k\Big]_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$$

Pelo Teorema fundamental do Cálculo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, k\, x^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right)'$$

# Os Coeficientes da Série de Potências

Derivando uma função definida por uma série de potências:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \\
f'(x) &= c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots \\
f''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2\, c_3 x + 4 \cdot 3\, c_4 x^2 + \cdots \\
f'''(x) &= 3! c_3 + 4! c_4 x + \cdots \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

podemos calcular os coeficientes $c_k$ tomando $x = 0$:

$$f(0) = c_0\,,\ f'(0) = c_1\,,\ f''(0) = 2c_2\,,\ f'''(0) = 3!c_3\,,\ \ldots$$

Substituindo os valores de $c_k$ obtemos a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\,.$

# Série de Taylor

Seja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas de todas as ordens num ponto $a \in D_f$. Chamamos série de Taylor de $f$ em $a$ a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ .$$

Teorema. Se $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x-a)^k$, então $c_k = f^{(k)}(a)/k!\,$. Ou seja, $\sum c_k\,(x-a)^k$ é a série de Taylor de $f$ em $x = a$.

# Funções Analíticas

Uma função pode não ser igual à sua série de Taylor: se

$$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} \quad \text{para } x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

então $f^{(k)}(0) = 0$ para todo o $k \in \mathbb{N}$ portanto a série de Taylor de $f$ em $a$ é identicamente nula, mas claramente $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$.

**Definição (Funções analíticas)**

Seja $f$ uma função com derivadas de todas as ordens em $a$. Dizemos que $f$ é analítica em $a$ se existir uma vizinhança $V$ de $a$ na qual:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

# Alguma Observações

- Uma função analítica é de classe $C^\infty$, mas nem todas as funções de classe $C^\infty$ são analíticas.
- Se $f$ é uma função definida por uma série de potências $\sum c_k(x-a)^k$, então $f$ é analítica em $a$: a sua série de Taylor é precisamente $\sum c_k(x-a)^k$.
- As funções analíticas num ponto $a$ são precisamente aquelas que podem ser representadas por uma série de potências numa vizinhança de $a$.
- O polinómio de Taylor de ordem $n$ em $a$ duma função analítica $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ é:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k\,.$$

# Exemplos de Funções Analíticas na Origem

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\operatorname{sen} x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \quad \text{para } |x| < 1\,.
\end{aligned}
$$

# Determinação de Séries de Taylor

Determinar uma série de Taylor duma função $f$ implica conhecer um número infinito de derivadas de $f$. Felizmente, existem alguns processos indiretos para obter séries de Taylor.

Exemplo. Vamos determinar a série de Taylor de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots .
\end{aligned}
$$

# Exemplo com a Série Geométrica

Vamos determinar a série de Taylor de $f(x) = \frac{1}{x+2}$ na origem.

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-x/2)}$$

Usando $\frac{1}{1-y} = \sum y^k = 1 + y + y^2 + \cdots \quad (|y| < 1)$
e substituindo $u = -x/2$, obtemos para $|y| = |-x/2| < 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \cdots \quad (|x| < 2) \end{aligned}$$

# Exemplos Usando Integração e Derivação

Vamos determinar a série de Taylor da função $\ln(1-x)$ na origem. Derivando e usando a série geométrica, obtemos

$$\big(\ln(1-x)\big)' = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k = -\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)$$

para $|x| < 1$. Primitivando:

$$\begin{aligned} \ln|1-x| &= -\sum_{k=0}^{\infty} \int x^k \, \mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \\ &= C - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad \text{para } |x| < 1. \end{aligned}$$

Tomando $x = 0$, obtemos $C = \ln|1-0| = 0$.
Tomando o limite quando $x \to -1$ obtemos:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \; .$$

Vamos determinar a série de Taylor da função $\arctan x$ na origem. Derivando:

$$
\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x^2| < 1)\,.
\end{aligned}
$$

Primitivando, obtemos

$$
\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots
$$

para $|x| < 1$. Tomando $x = 0$: $C = \arctan 0 = 0$. Tomando o limite $x \to 1$ obtemos:

$$
\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\,.
$$

Vamos calcular a série de Taylor de $f(x) = \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ em $a = 0$.
Podemos determinar, primeiro, a série de Taylor de $\frac{1}{(1+x)^3}$, e multiplicá-la por $x^2$. Primitivando duas vezes:

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^3} = -\frac{1}{2(1+x)^2} + C \quad \text{e} \quad \int \frac{-\mathrm{d}t}{2(1+t)^2} = \frac{1}{2(1+x)} + C\ .$$

Agora, para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{2}\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\, k\, x^{k-1} = \frac{1}{2}\left(-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\, k(k-1)\, x^{k-2} = \frac{1}{2}\left(2 - 6x + 12x^2 + \cdots\right)$$

$$\frac{x^2}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\, k(k-1)\, x^{k} = x^2 - 3x^3 + 6x^4 + \cdots\ .$$

## Séries de Taylor em Pontos $a \neq 0$

Para determinar uma série de Taylor num ponto $a \neq 0$ fazemos a substituição $y = x - a$.

Exemplo. Queremos determinar a série de Taylor de $\mathrm{e}^x$ em $a = 2$. . Seja $y = x - 2$. Então:

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{y+2} = \mathrm{e}^2 \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^2}{k!} (y-2)^k .$$

# Notação para o Resto duma Série

Dada uma série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} c_k\,(x-a)^k = c_0 + c_1\,(x-a) + c_2\,(x-a)^2 + \cdots\,,$$

é comum representar o resto da série, $R_{n-1}$, por

$$\mathcal{O}\left((x-a)^n\right) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k\,(x-a)^k = c_n\,(x-a)^n + c_{n+1}\,(x-a)^{n+1} + \cdots\,.$$

$\mathcal{O}\left((x-a)^n\right)$ representa os termos de ordem $n$ ou superior.

Exemplo. Sabemos que $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \left(\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots\right)$, logo, podemos escrever

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$

# Propriedades de $\mathcal{O}(x^n)$

- Para qualquer $m \leqslant n$,

$$\frac{c_n\, x^n + c_{n+1}\, x^{n+1} + \cdots}{x^m} = c_n\, x^{n-m} + c_{n+1}\, x^{n+1-m} + \cdots$$

  pelo que:

$$\frac{\mathcal{O}(x^n)}{x^m} = \mathcal{O}(x^{n-m})\,.$$

- Para qualquer $n \geqslant 1$,

$$\lim_{x \to 0} \mathcal{O}(x^n) = 0\,.$$

# Exemplos de Cálculo de Limites

Vamos calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)-x^3}{x\cos(x^4)-x}$ ,

$$\operatorname{sen}(x^3)-x^3 = \left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^5}{5!} + \cdots\right) - x^3 = -\frac{x^9}{6} + \mathcal{O}(x^{15})$$

$$x\cos(x^4)-x = x\left(1 - \frac{(x^4)^2}{2} + \frac{(x^4)^4}{4!} + \cdots\right) - x = -\frac{x^9}{2} + \mathcal{O}(x^{17}),$$

logo

$$\frac{\operatorname{sen}(x^3)-x^3}{x\cos(x^4)-x} = \frac{-x^9/6 + \mathcal{O}(x^{15})}{-x^9/2 + \mathcal{O}(x^{17})} = \frac{-1/6 + \mathcal{O}(x^6)}{-1/2 + \mathcal{O}(x^8)} .$$

Tomando o limite quando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)-x^3}{x\cos(x^4)-x} = \frac{-1/6}{-1/2} = \frac{1}{3} .$$