7/Mar/2018 – Aula 6

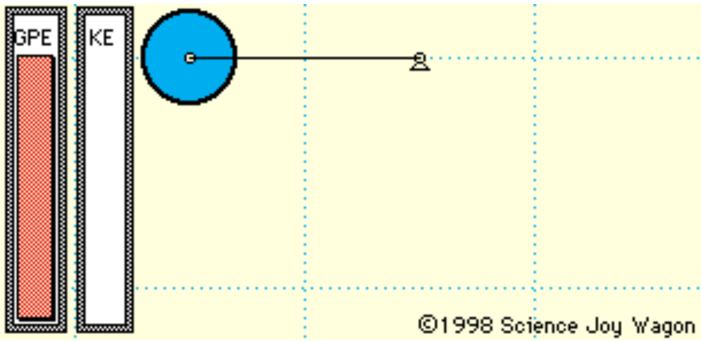
6. Trabalho e energia cinética
   6.1 Trabalho de uma força
   6.2 Trabalho de várias forças
   6.3 Lei do trabalho - energia cinética

6.4 Molas
   6.4.1 Lei de Hooke
   6.4.2 Trabalho

6.5 Potência

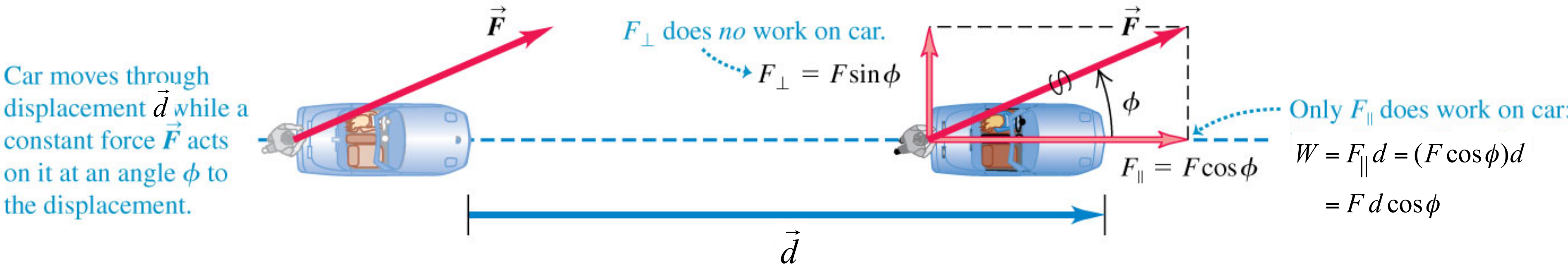
12/Mar/2018 – Aula 7

7. Conservação de energia
   7.1 Forças conservativas e não conservativas
   7.2 Energia potencial gravítica
   7.3 Energia potencial elástica
   7.4 Nível zero da energia potencial
   7.5 Conservação da energia mecânica
   7.6 Energia e cinemática
   7.7 Energia e forças não-conservativas



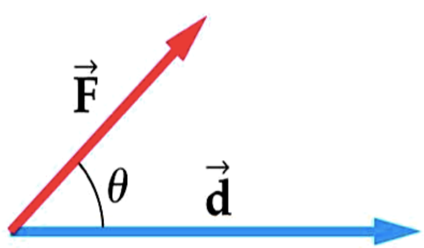
6.1 Trabalho de uma força

Se o deslocamento e a força não forem paralelos, o **trabalho** é $W = F\,d\cos\theta$



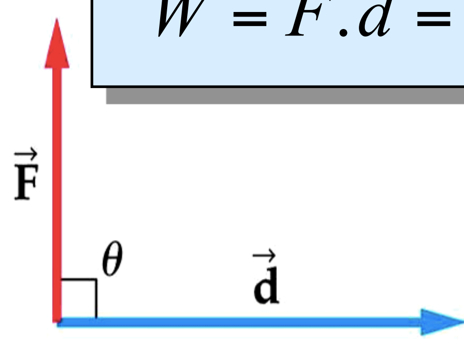
Uma força pode realizar trabalho positivo, negativo ou nulo, dependendo da orientação relativa entre o vetor força e o vetor deslocamento:

$$\boxed{W = \vec{F}.\vec{d} = F\,d\cos\theta}$$



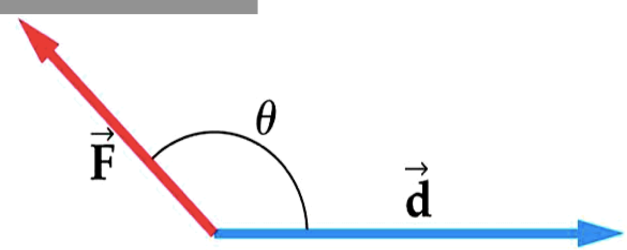
$\theta < 90°$

$W > 0$



$\theta = 90°$

$W = 0$



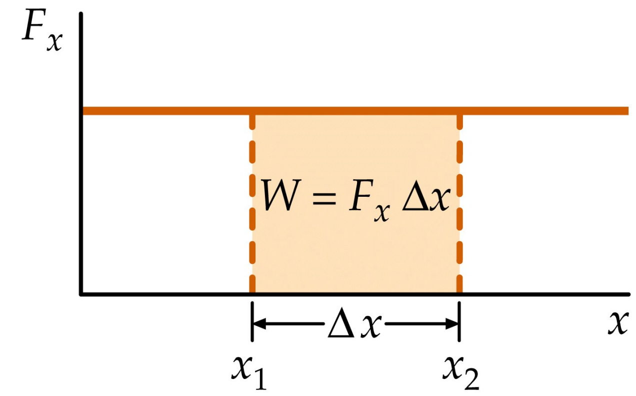
$\theta > 90°$

$W < 0$

Aula anterior

6.1 Trabalho de uma força

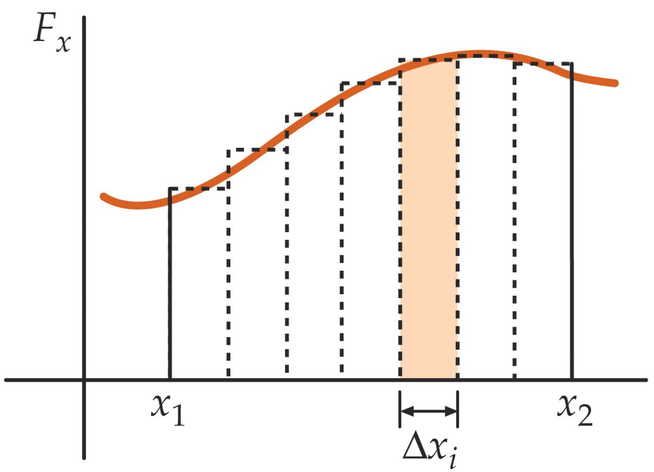
Se a força for constante, pode-se interpretar graficamente o trabalho realizado como a área do retângulo $W = F\,\Delta x$.



Se a força não for constante, é possível aproximá-la a uma sucessão de valores constantes. Nesse caso,

$$\Delta\vec{x} \rightarrow \mathrm{d}\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}W = \vec{F}.\mathrm{d}\vec{x}$$

$$\boxed{W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.\mathrm{d}\vec{x}}$$

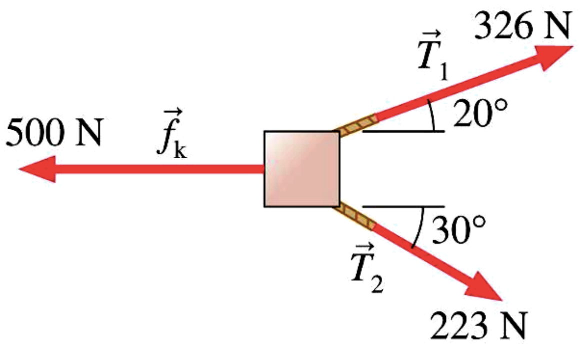


Aula anterior

6.2 Trabalho de várias forças

Se houver mais do que uma força a atuar num objeto, o trabalho realizado pela força resultante é

$$W_{\text{total}} = F_{1x}\Delta x_1 + F_{2x}\Delta x_2 + F_{3x}\Delta x_3 + \cdots$$



$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} W_{\text{total}} &= F_{1x}\Delta x + F_{2x}\Delta x + F_{3x}\Delta x + \cdots \\ &= (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots)\Delta x \\ &= F_{\text{res}\,x}\Delta x \end{aligned}$$

Caso geral: várias forças aplicadas e deslocamento a 3 dimensões:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{\text{res}} . \mathrm{d}\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_{\text{res}\,x} . \mathrm{d}\vec{x} + \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_{\text{res}\,y} . \mathrm{d}\vec{y} + \int_{z_1}^{z_2} \vec{F}_{\text{res}\,z} . \mathrm{d}\vec{z}$$

Aula anterior

6.3 Lei do trabalho-energia cinética

A partir de uma das equações do movimento, $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, podemos escrever

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\Delta x \quad \Rightarrow \quad mv_f^2 = mv_i^2 + 2(ma)\Delta x$$

$$\rightarrow \quad mv_f^2 = mv_i^2 + 2F\Delta x = mv_i^2 + 2W \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + W$$

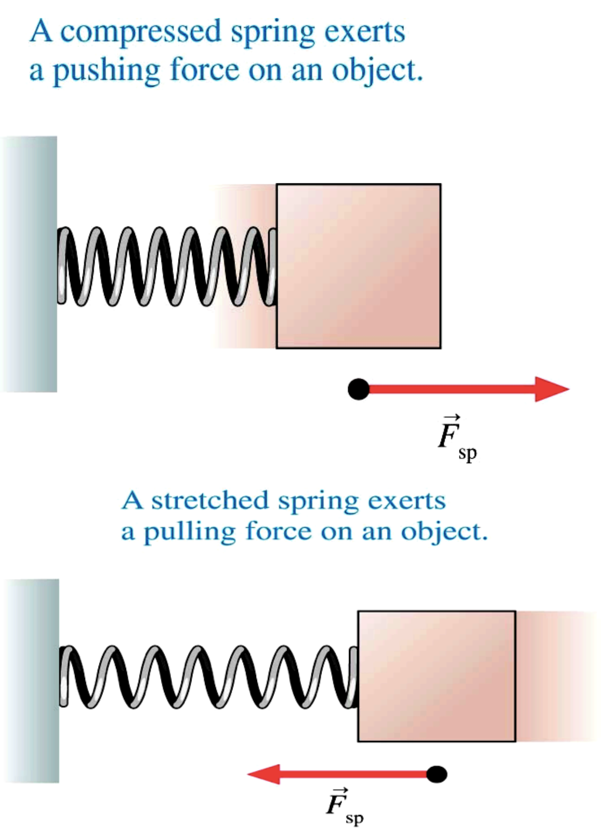
À quantidade $\frac{1}{2}mv^2$ dá-se o nome de **energia cinética**. Então,

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = E_{\text{cin}\,f} - E_{\text{cin}\,i} \quad \rightarrow \quad \boxed{W = \Delta E_{\text{cin}}}$$

Lei do trabalho-energia cinética: o trabalho total realizado sobre um objeto é igual à variação da energia cinética desse objeto.

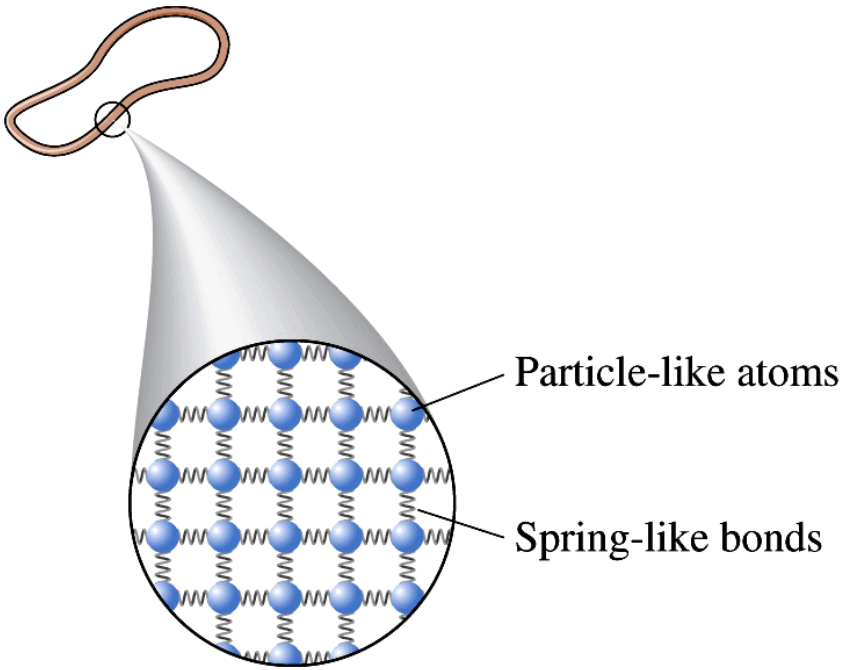
6.4 Molas

Se um material exercer uma **força de restituição** sobre um objeto, diz-se **elástico**. Essa força de restituição repõe o sistema na sua posição de equilíbrio.



Exemplos:

- molas
- elásticos

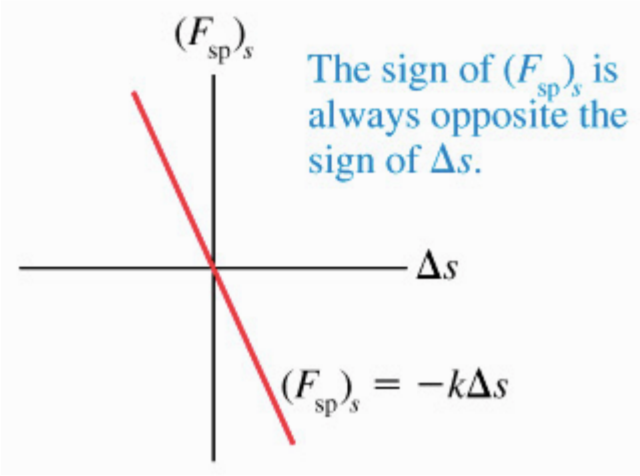


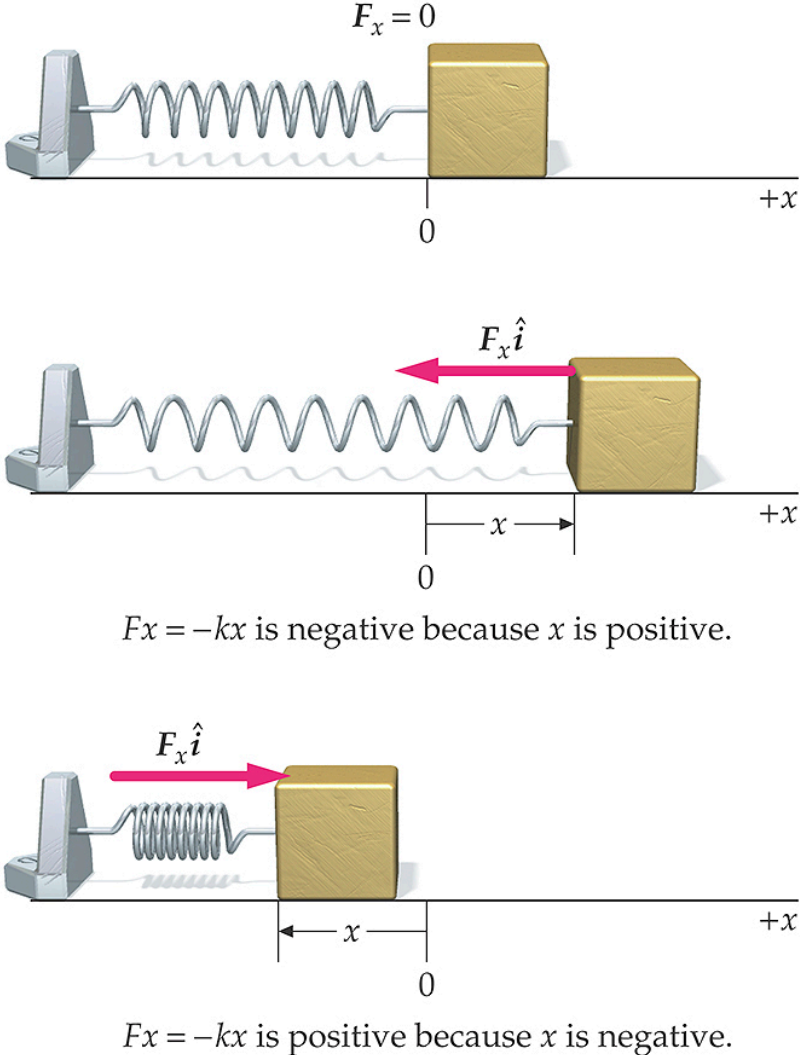
6.4.1 Lei de Hooke

Lei de Hooke: a força de restituição é proporcional ao simétrico do deslocamento:

$$\vec{F} = -k\,\Delta\vec{x}$$

Unidades da constante k da mola: N/m = kg/s^2.

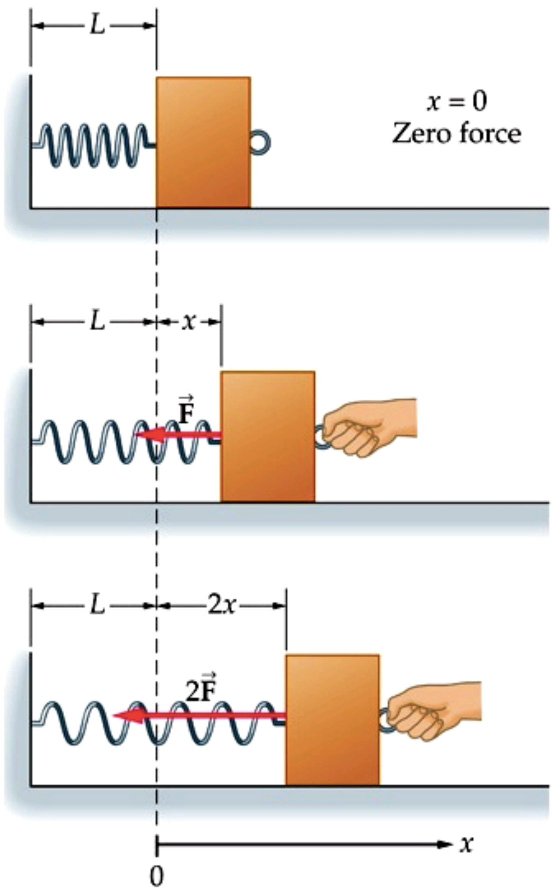




6.4.1 Lei de Hooke

A força de restituição opõe-se sempre à compressão ou extensão da mola.

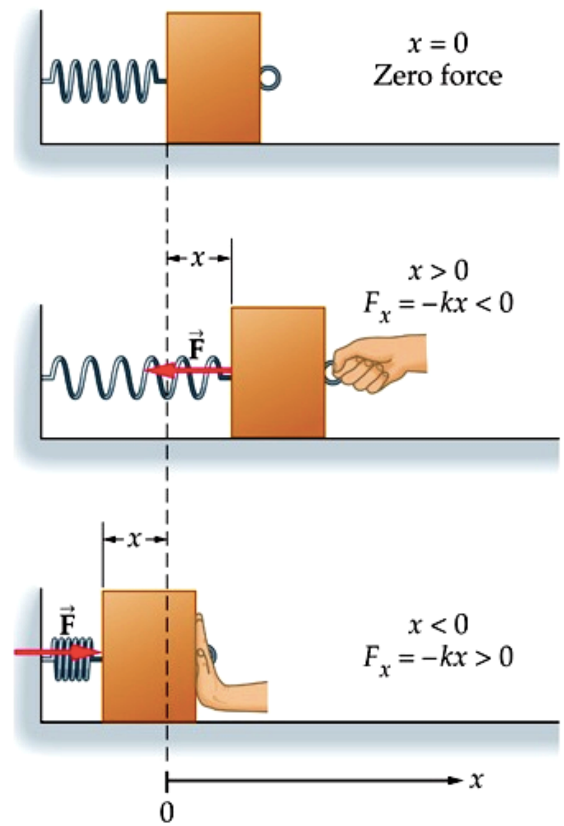
$$\vec{F} = -k\,\Delta\vec{x}$$



(a)

Molas

simulação



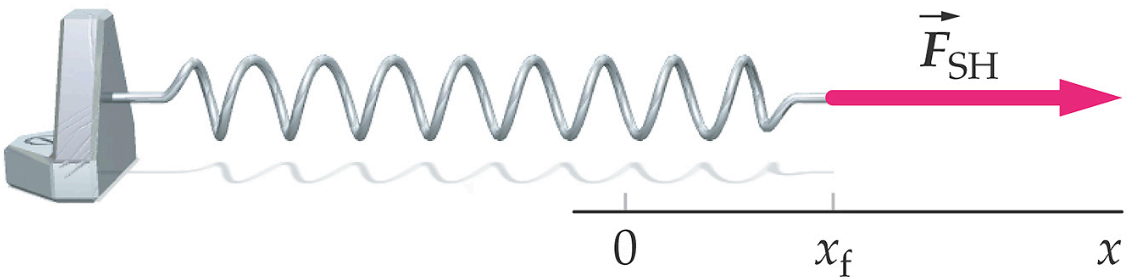
(b)

6.4.2 Trabalho

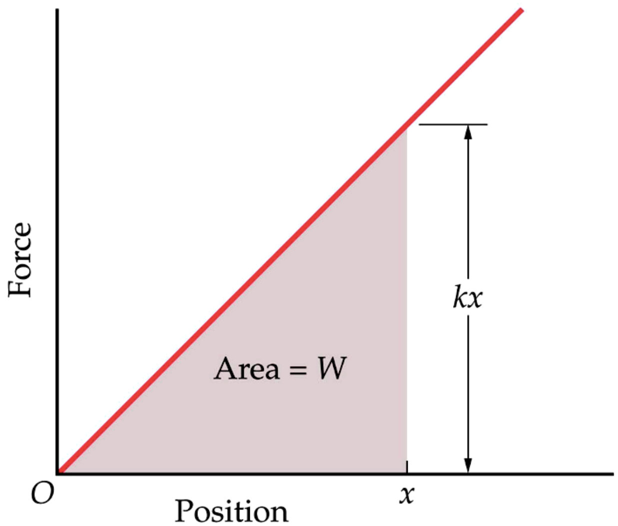
Trabalho realizado pela força de restituição de uma mola:

$$\boxed{\vec{F} = -k\,\Delta\vec{x}} \Rightarrow W_{mola} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_x . \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} \left(-kx\right) \mathrm{d}x = -k\frac{1}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Nota: trabalho realizado por uma força **oposta** à força de restituição:



$$W_{SH} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_x . \mathrm{d}\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} \left(kx\right) \mathrm{d}x = k\frac{1}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$



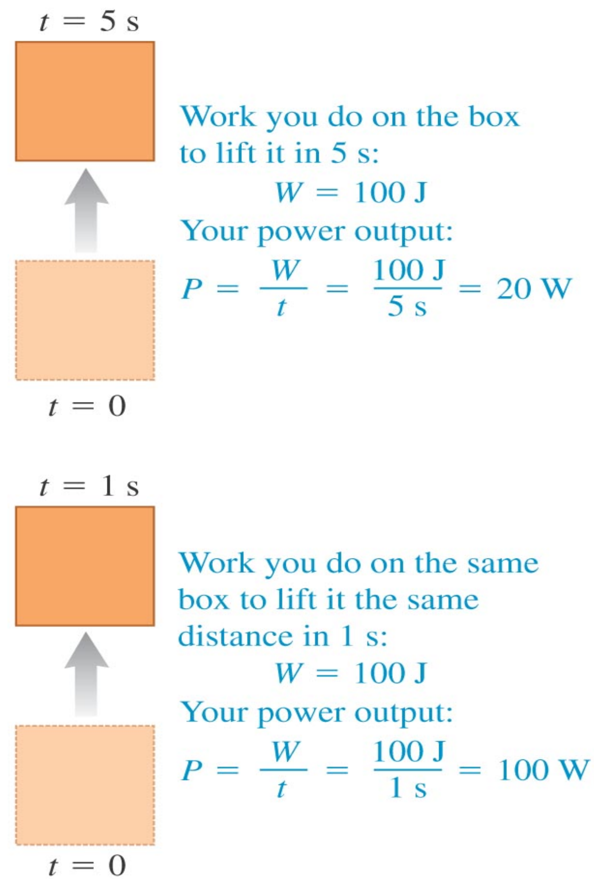
6.5 Potência

A **potência** é uma medida da taxa a que é realizado o trabalho:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$$

Unidades de P : J/s = Watt (W)

Como $\quad W = \vec{F}.\Delta\vec{x} = \vec{F}.\vec{v}\Delta t \quad \Rightarrow \quad P = \vec{F}.\vec{v}$

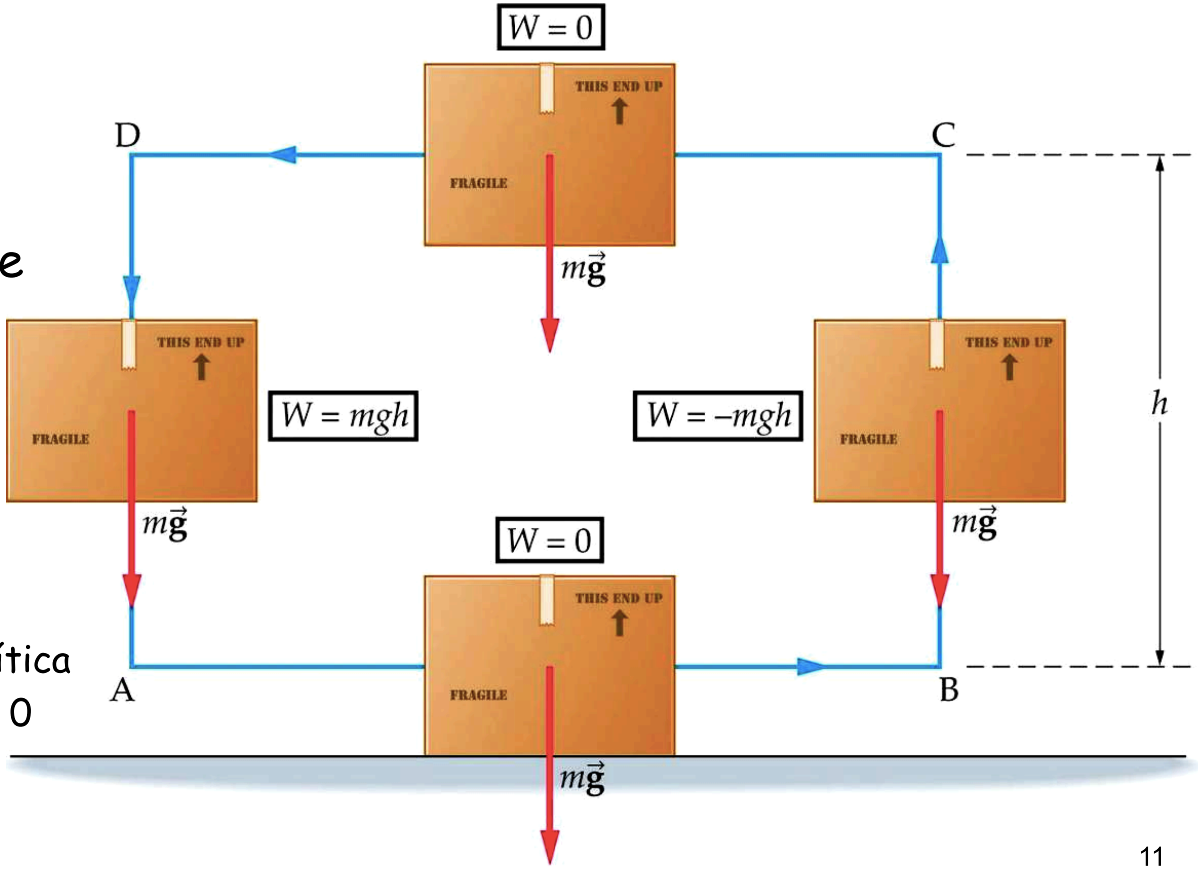


7.1 Forças conservativas e não conservativas

Uma força diz-se **conservativa** se o trabalho por ela realizado **não depender do percurso efetuado**, mas apenas do deslocamento (diferença entre os pontos inicial e final). Portanto, o trabalho realizado por uma força conservativa, ao longo de uma linha fechada, **é nulo**.

Exemplos de forças **conservativas**:

- força de restituição de uma mola
- força gravítica.



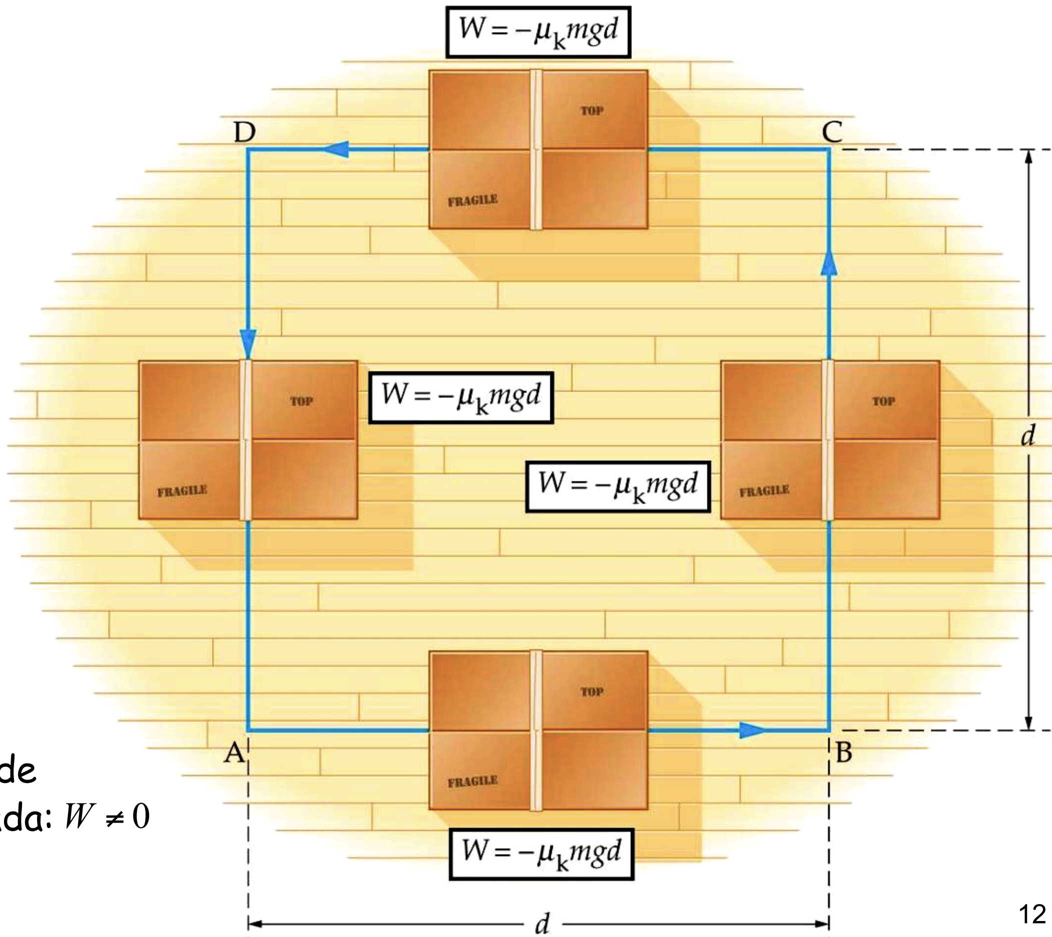
Trabalho realizado pela força gravítica ao longo de uma linha fechada: $W = 0$

7.1 Forças conservativas e não conservativas

Uma força diz-se **não-conservativa (ou dissipativa)** se o trabalho por ela realizado **depender do percurso efetuado**. Portanto, o trabalho realizado por uma força não-conservativa, ao longo de uma linha fechada, **não é nulo**.

Exemplo de forças **não-conservativas**:

- atrito

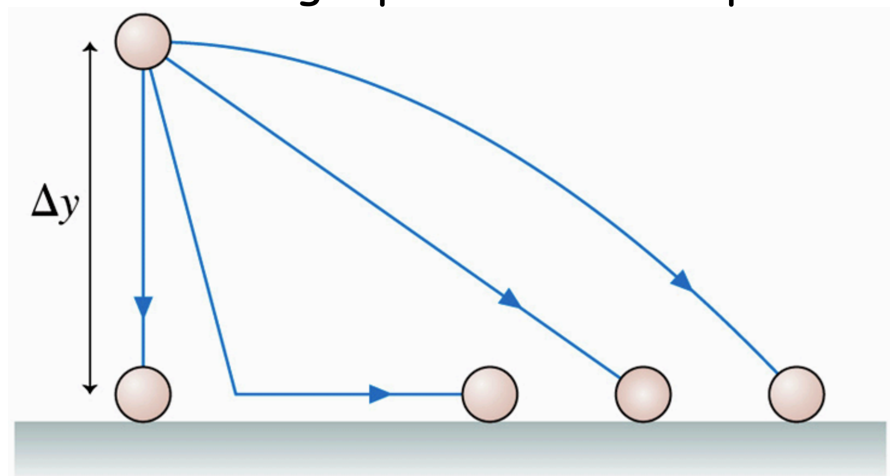


Trabalho realizado por uma força de atrito, ao longo de uma linha fechada: $W \neq 0$

7.2 Energia potencial gravítica

A qualquer força conservativa está associada uma energia potencial. Exemplo: **energia potencial gravítica**.

O trabalho realizado pela força gravítica é independente do percurso escolhido, só depende da diferença de alturas Δy.



Projétil **Simulação**

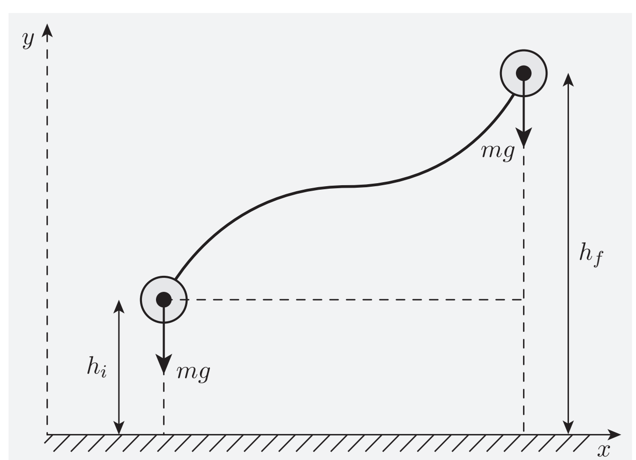
$$W = \int_{s_i}^{s_f} \vec{F}.d\vec{r}$$

$$W_{if} = (-mg)(h_f - h_i) = mgh_i - mgh_f$$

$$= U_i - U_f = -\Delta U$$

$$\boxed{U(h) = mgh}$$

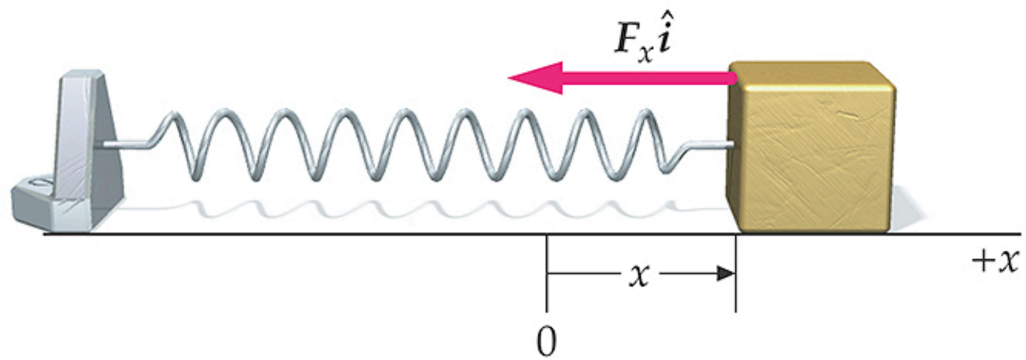
Energia potencial gravítica



7.3 Energia potencial elástica

A força de restituição de uma mola também é conservativa. Logo, está-lhe associada uma **energia potencial (elástica)**.

$$dU_{\text{mola}} = -dW = -\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$
$$= -F_x dx = -(-kx)\,dx$$
$$= kx\,dx$$

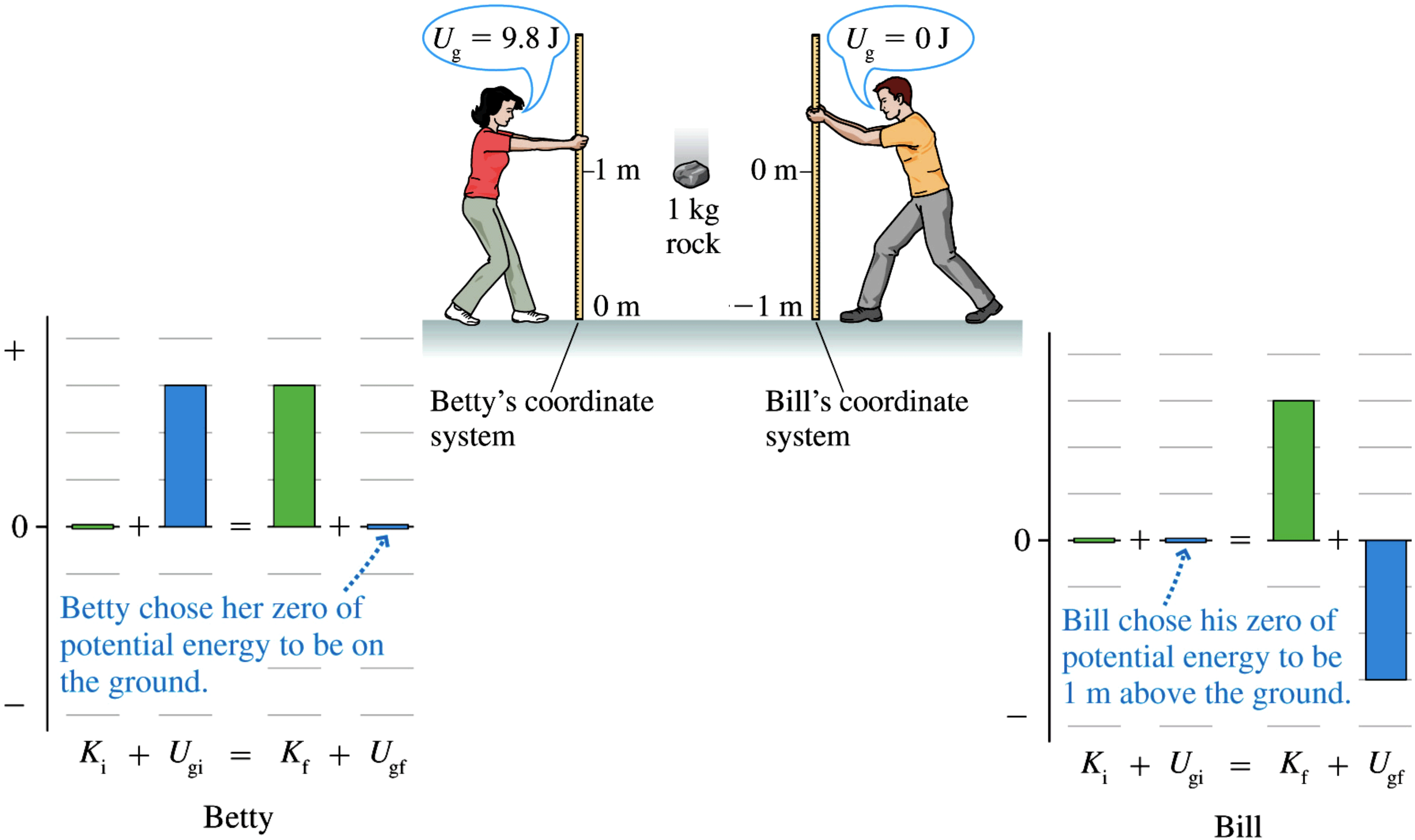


Mola **Simulação**

$$U_{\text{mola}} = \int_{x_i}^{x_f} kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

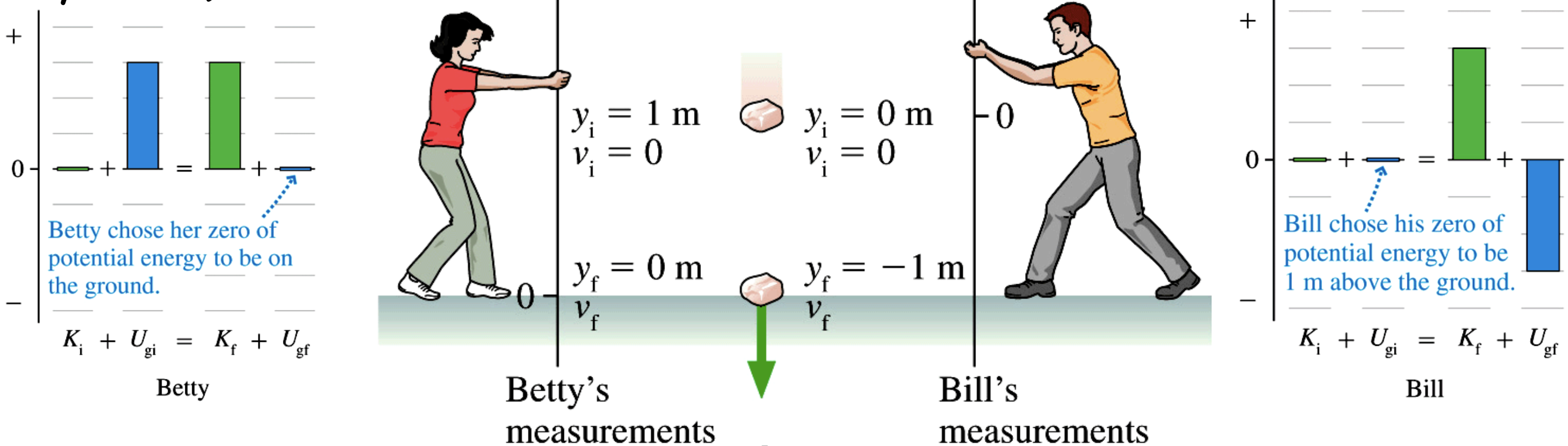
Se $U_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{\text{mola}} = \frac{1}{2}kx^2}$

7.4 Nível zero da energia potencial



7.4 Nível zero da energia potencial

Exemplo: uma pedra, inicialmente em repouso, é deixada cair. Determine a sua velocidade imediatamente antes de tocar o solo, segundo os dois referenciais (Betty e Bill).



$$E_{cin\,f} = \frac{1}{2}mv_f^2 = -(U_f - U_i) = -\Delta U$$

Betty: $U_i = mg\,y_i = 9{,}8$ J

$U_f = mg\,y_f = 0$ J

$\Delta U_{\text{Betty}} = U_f - U_i = -9{,}8$ J

Bill: $U_i = mg\,y_i = 0$ J e $U_f = mg\,y_f = -9{,}8$ J

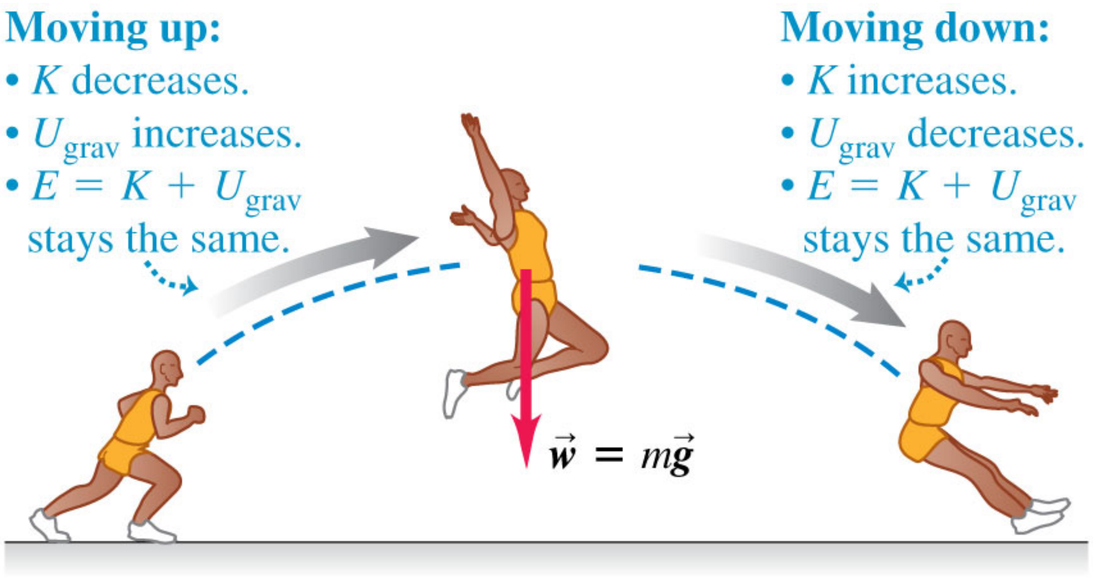
$\Delta U_{\text{Bill}} = U_f - U_i = -9{,}8$ J

$$v_f = \sqrt{\frac{-2\Delta U}{m}} = \sqrt{\frac{-2(-9{,}8\text{ J})}{(1\text{ kg})}} = 4{,}43\text{ m/s}$$

7.5 Conservação da energia mecânica

A **energia mecânica total** de um sistema é a soma da sua energia cinética com a energia potencial.

Se as únicas forças em ação forem **conservativas**, a energia mecânica total **conserva-se**. Por exemplo, quando a única força a realizar trabalho num sistema for a força gravítica, a energia mecânica total mantém-se.



7.5 Conservação da energia mecânica

Uma força conservativa permite "converter" energia cinética em energia potencial e vice-versa.

O trabalho realizado entre dois pontos por uma força conservativa:

- pode ser expresso em termos da energia potencial
- é reversível
- é independente do percurso efetuado
- é nulo, se os pontos inicial e final do percurso coincidirem.

Uma força não-conservativa não permite "armazenar" energia potencial, mas faz variar a energia interna do sistema.

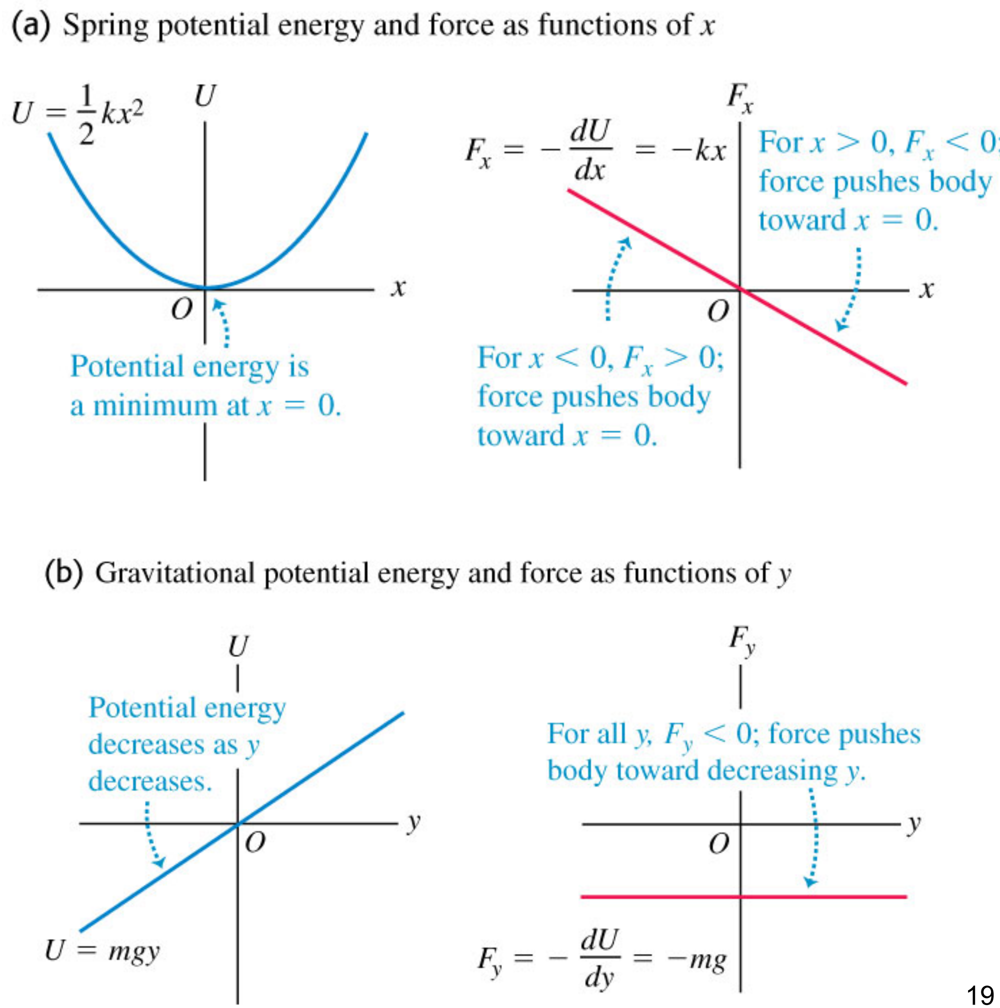
7.5 Conservação da energia mecânica

Uma força conservativa pode ser obtida a partir da sua função energia potencial.

Por exemplo, a uma dimensão:

$$-dU = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F_x dx$$

$$\boxed{F_x = -\frac{dU}{dx}}$$



A duas e três dimensões:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

trabalho — variação de Energia potencial

$$W = + \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = - \Delta E_p$$

por outro lado é igual a variação de E_c

$$W = \Delta E_c$$

$$\Delta E_c = - \Delta E_p$$

$$0 = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta (E_m)$$
$$= E_{m_f} - E_{m_i}$$
$$= (E_{c_f} + E_{p_f}) - (E_{c_i} + E_{p_f})$$

implica a conservação da energia mecânica

$$\boxed{E_m = E_c + E_p}$$

Tipos de forças:

- conservativas, W não depende do caminho, $W = -(E_{p_f} - E_{p_i})$
  gravítica $\vec{P} = m\vec{g}$, $U = mgh$
  elástica $\vec{F}_e = -K\vec{x}$, $U = \frac{1}{2} Kx^2$
- não conservativas, não existe energia potencial respetiva
  atrito $\vec{F}_a = -\mu_K |\vec{N}| \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow E_m$ diminui
  forçada $\vec{F}_f = F_0 \cos \omega t \ \hat{e}_x$
- de ligação, sem trabalho, não afeta a Energia mecânica
  $\vec{N}$, anula componente perpendicular das forças
  $\vec{T}$ e $-\vec{T}$, pares de tensões, mantêm o comprimento dum fio

No total obtemos para o trabalho da força resultante

$$W = \underbrace{-\Delta E_p}_{\text{energias potenciais}} + \underbrace{0}_{\text{das forças de ligação}} + \underbrace{W_{nc}}_{\text{das forças não conservativas}}$$

logo $$\boxed{W_{nc} = \Delta E_m = E_{m_f} - E_{m_i}}$$

Exemplo

A velocidade inicial do trenó é 2 m/s. A altura da rampa é 5 m. Determine a velocidade do trenó quando chega ao fim da rampa.

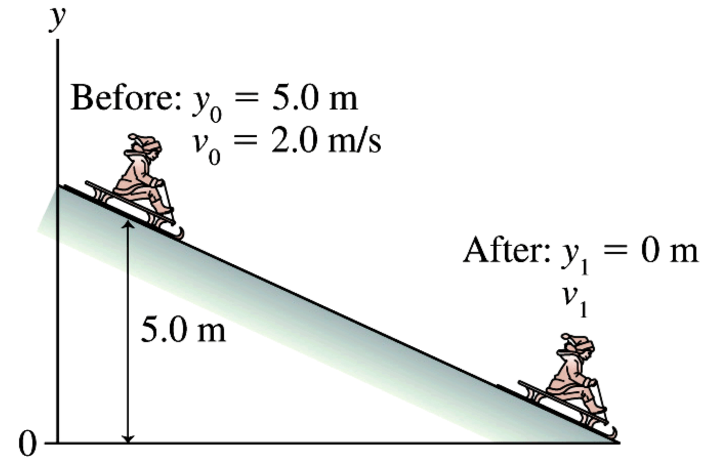
$$E_{cin\,i} + U_i = E_{cin\,f} + U_f$$

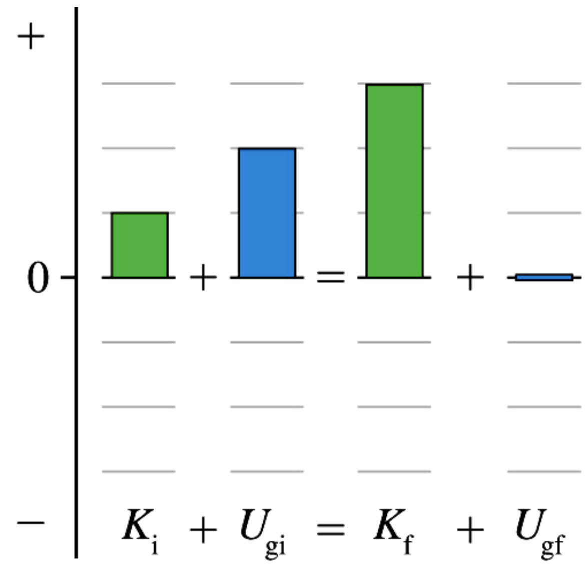
$$\frac{1}{2} m v_i^2 + m g\, y_i = \frac{1}{2} m v_f^2 + m g\, y_f$$

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2 g y_i}$$

$$= \sqrt{(2\ \text{m/s})^2 + 2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(5\ \text{m})}$$

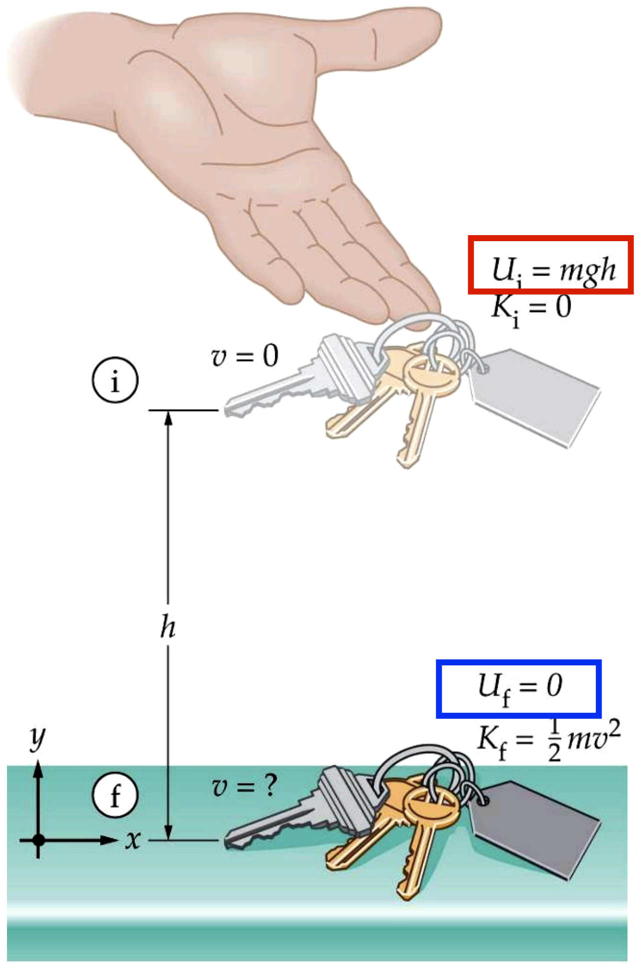
$$= 10{,}1\ \text{m/s}$$

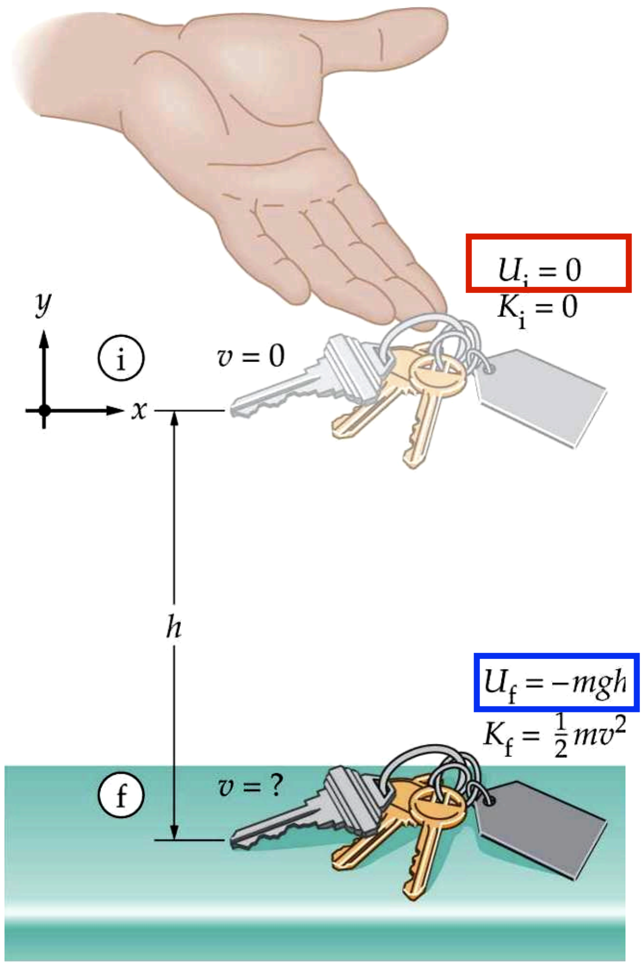




7.6 Energia e cinemática

O princípio da conservação da energia mecânica pode tornar mais fácil a resolução dos problemas de cinemática.





7.6 Energia e cinemática

A partir do princípio da conservação da energia mecânica:

$$\boxed{E = E_{\text{cin}\,i} + U_i = E_{\text{cin}\,f} + U_f}$$

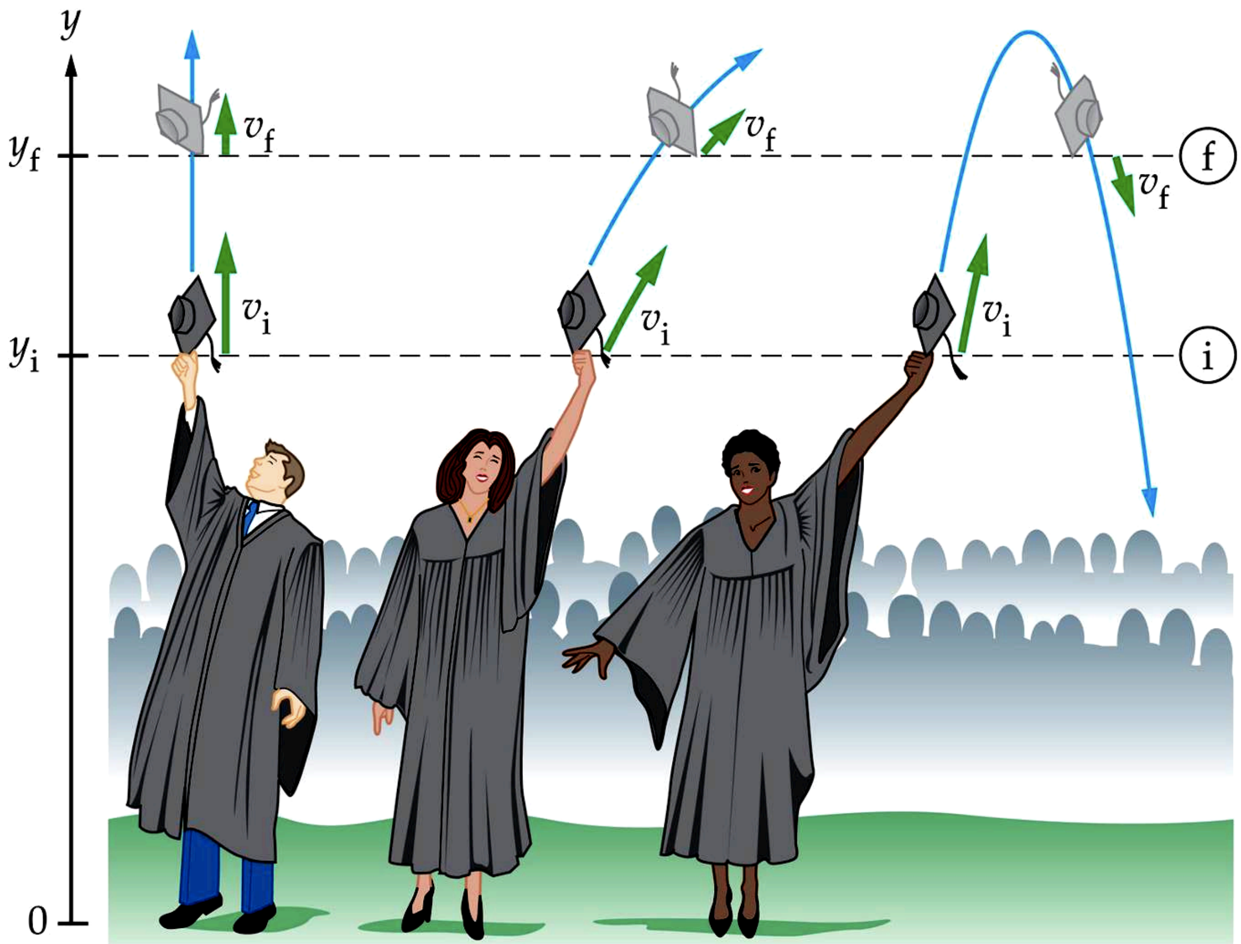
$$\cancel{m}g\,y_i + \frac{1}{2}\cancel{m}v_i^2 = \cancel{m}g\,y_f + \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 \qquad \times 2$$

$$2g\,y_i + v_i^2 = 2g\,y_f + v_f^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_f^2 = v_i^2 + 2g\left(y_i - y_f\right) = v_i^2 - 2g\,\Delta y}$$

7.6 Energia e cinemática

A energia é um escalar, pelo que a velocidade do boné às mesmas alturas é a mesma, independentemente do ângulo de lançamento (desde que a velocidade inicial seja suficiente para o fazer subir à mesma altura).



7.7 Energia e forças não-conservativas

Na presença de forças não-conservativas, a energia mecânica total não é conservada:

$$W_{total} = W_c + W_{nc}$$

$$\Delta E_{cin} = -\Delta U + W_{nc}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{nc} = \Delta U + \Delta E_{cin} = \Delta E}$$