TÉCNICO LISBOA

Electrónica Geral

2020/2021 – 1º Semestre

MEFC, MEAer

Problema

Filtros Digitais FIR

a) A partir de um filtro passa-baixo ideal com frequência de corte de 2,5 kHz, obter, por truncatura da resposta impulsiva usando uma janela triangular, a função de sistema de um filtro FIR com atraso constante de 0,15 ms e frequência de amostragem de 20 kHz.

b) Indicar as modificações da resposta em frequência se for utilizada uma janela rectangular.

c) Determinar a equação de recorrência, a resposta impulsiva e indicar se o filtro é estável ou instável.

d) Calcular a atenuação em dB e o atraso em μs, às frequências de 5 kHz e 15 kHz.

e) Representar dois diagramas de fluxo de sinal correspondentes a formas directas com número mínimo de multiplicações.

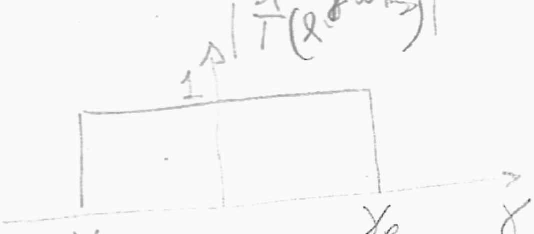
Filtro Digital FIR

$f_p = 2,5\ KHz \Rightarrow \gamma_p = \frac{\pi}{4}$

$f_s = 20\ KHz$

$\tau = 0,15\ ms$

Resolução:



$\gamma = \omega T_s = 2\pi \frac{f}{f_s}$

$-\gamma_p = -\frac{2\pi f_p}{f_s} = -\frac{\pi}{4}$ $\qquad \gamma_p = \frac{2\pi f_p}{f_s} = \frac{\pi}{4}$

$\tau = -\frac{\partial \phi(\omega)}{\partial \omega} \Rightarrow \phi(\omega) = -\int \tau\, d\omega = -\tau \omega$

$\Rightarrow T(e^{j\gamma}) = e^{-j\tau f_s \frac{\omega}{f_s}} = e^{-j\tau f_s \gamma} = e^{-j3\gamma}$

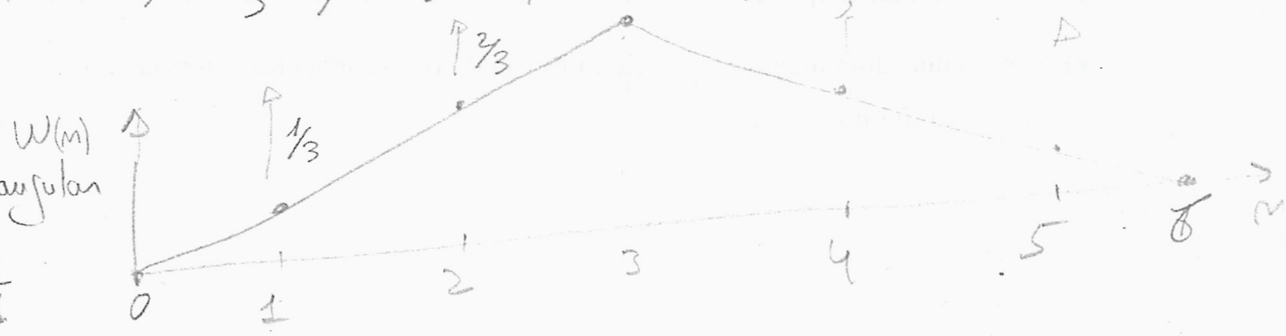
$\tau(\omega) = -\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\tau f_s \frac{\omega}{f_s}\right\} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\frac{N-1}{2}\,\frac{\omega}{f_s}\right\} = \frac{N-1}{2 f_s} \Rightarrow N = 7$ baixa (6ª ordem) dos

$\hat{T}_n(z) = \hat{h}_0 + \hat{h}_1 z^{-1} + \hat{h}_2 z^{-2} + \hat{h}_3 z^{-3} + \hat{h}_4 z^{-4} + \hat{h}_5 z^{-5} + \hat{h}_6 z^{-6}$

$W_\Delta = 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 0$

Janela Triangular

$W(m) = \frac{2m}{N-1}$ para $m \le \frac{N-1}{2}$



$\hat{h}_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\gamma_p}^{+\gamma_p} T(e^{j\gamma})\, e^{jm\gamma}\, d\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-j3\gamma} e^{jm\gamma}\, d\gamma$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{j(m-3)\gamma}\, d\gamma = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{j(m-3)} e^{j(m-3)\gamma}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} =$

$= \frac{1}{\pi(m-3)} \sin\left[(m-3)\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{4}\,\frac{\sin\left[(m-3)\frac{\pi}{4}\right]}{(m-3)\frac{\pi}{4}}$

$h_m = \hat{h}_m \times W_m$

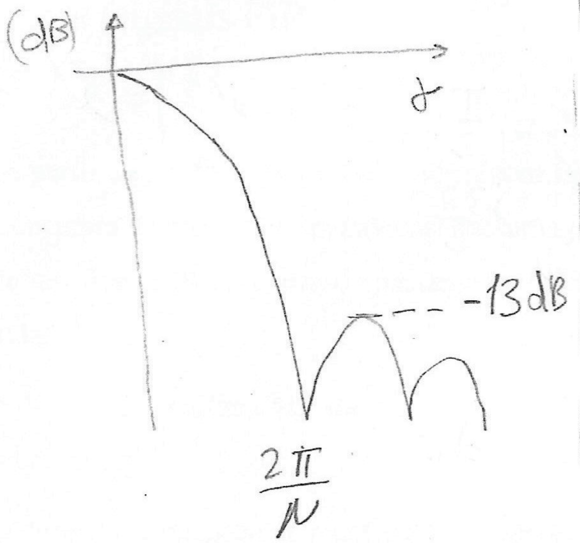
Nota:

m	$\hat{h}_m$
0	—
1	$\frac{1}{2\pi}$
2	$\frac{1}{4}\,\frac{1/\sqrt{2}}{\pi/4}$
3	$1 \times \frac{1}{4}$

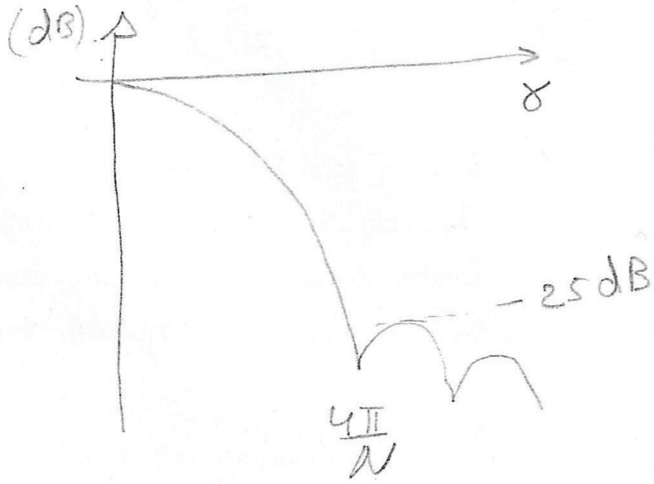
m	$\hat{h}_m$	h_m
0	0,075	0
1	0,159	0,05
2	0,225	0,15
3	0,25	0,25
4	0,225	0,15
5	0,159	0,053
6	0,075	0

$$T_\Delta(z) = 0{,}053\, z^{-1} + 0{,}15\, z^{-2} + 0{,}25\, z^{-3} + 0{,}15\, z^{-4} + 0{,}053\, z^{-5}$$
$$= h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + h_4 z^{-4} + h_5 z^{-5}$$

b) Rectangular



Triangular



- Maior ondulação
- Banda de Transição mais estreita

c) 1) Eq. de recorrência:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = T(z)\,X(z)$$
$$\Rightarrow y_n = \mathcal{Z}^{-1}\{T(z)\,X(z)\}$$

$$y_n = h_1 x_{n-1} + h_2 x_{n-2} + h_3 x_{n-3} + h_4 x_{n-4} + h_5 x_{n-5}$$
$$= 0{,}053\, x_{n-1} + 0{,}15\, x_{n-2} + 0{,}25\, x_{n-3} + 0{,}15\, x_{n-4} + 0{,}053\, x_{n-5}$$

2) Resposta impulsiva: Num FIR a resposta impulsiva é igual à sucessão dos h_n

$0, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5$

3) Estabilidade: Um filtro FIR é <u>sempre</u> estável

d) $T(e^{j\gamma}) = h_1(e^{-j\gamma}+e^{-j5\gamma}) + h_2(e^{-j2\gamma}+e^{-j4\gamma}) + h_3 e^{-j3\gamma}$

$$= e^{-j3\gamma}\left[h_1(e^{+j2\gamma}+e^{-j2\gamma}) + h_2(e^{+j\gamma}+e^{-j\gamma}) + h_3\right]$$

$$= e^{-j3\gamma}\left[2h_1\cos(2\gamma) + 2h_2\cos(\gamma) + h_3\right]$$

1) $f_1 = 5\,kHz \Rightarrow \gamma_1 = \frac{2\pi f}{f_s} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T(e^{j\frac{\pi}{2}}) = e^{-j\frac{3\pi}{2}}\left[-2h_1+h_3\right]$

$\Rightarrow T(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 0{,}144\ e^{-j\frac{3\pi}{2}}$

Atenuação:

$A(\gamma) = 20\log\frac{1}{|T(e^{j\gamma})|}$ dB

$A(\gamma_1) = 16{,}83$ dB

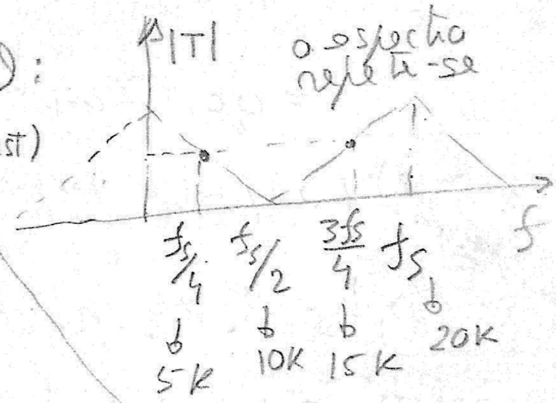
Atraso

$\tau = -\frac{\partial\phi}{\partial\omega} = -\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\omega} = -\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\frac{1}{f_s}$

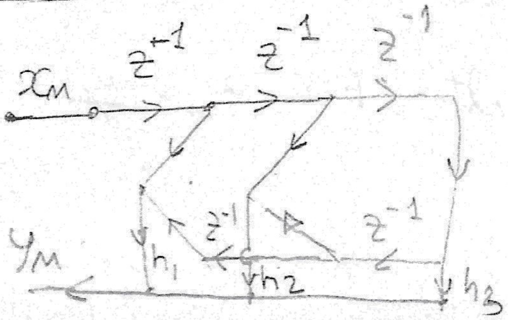
$\tau_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial\gamma}\Big|_{\gamma=\gamma_1} \times \frac{1}{f_s} = 3\times\frac{1}{f_s} = 0{,}15\,ms$ (como é dado no enunciado!)

τ é constante pois fase é linear

2) $f_2 = 15\,kHz \rightarrow$ dá igual:
(Teorema de Nyquist)



e) Forma Directa



Transposta