# FICHA 14 - SOLUÇÕES

## AULA PRÁTICA

1. a) $R = 3$; a série converge absolutamente para $0 \leq x \leq 6$, converge simplesmente para $x = 0$ e diverge para $x < 0 \vee x \geq 6$;

   b) $R = 4$; a série converge absolutamente para $-3 \leq x \leq 5$ e diverge para $x < -3 \vee x > 5$.

   c) $R = 1$; a série converge absolutamente para $0 < x < 2$, converge simplesmente para $x = 2$ e diverge para $x \leq 0 \vee x > 2$.

   d) $R = 1$; a série converge absolutamente para $-4 \leq x \leq -2$, e diverge para $x < -4 \vee x > -2$.

   e) $R = 2$; a série converge absolutamente para $0 < x < 4$, e diverge para $x \leq 0 \vee x \geq 4$.

   f) $R = +\infty$; a série converge absolutamente para $x \in \mathbb{R}$.

2. a) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(2n+1)!}$ é $R = +\infty$, logo esta série converge absolutamente para $y \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = x^2$, conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ converge absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   b) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^n$ é $R = 1$, e esta série converge absolutamente para $-1 < y < 1$, converge simplesmente para $y = 1$ e diverge para $y \leq -1 \vee y > 1$. Fazendo $y = x^2$, conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$ converge absolutamente para $-1 < x < 1$, converge simplesmente para $x = -1 \vee x = 1$ e diverge para $x < -1 \vee x > 1$.

   c) O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n^2+1}$ é $R = 1$; esta série converge absolutamente para $|y| \leq 1$ e diverge para $|y| > 1$. Fazendo $y = (5x+1)^2$, e resolvendo em ordem a $x$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$ converge absolutamente para $-\frac{2}{5} \leq x \leq 0$ e diverge para $x < -\frac{2}{5} \vee x > 0$.

3. a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}} = \frac{2(x-1)}{3-x}$, para $-1 < x < 3$,

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}} = \frac{x^2}{3(3-x^2)}$, para $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,3^n}\, x^n = e^{\frac{x}{3}}$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, y^n = e^y$, para $y \in \mathbb{R}$).

4. a) $R = 3$. Convergência absoluta para $x \in ]-2, 4[$ (é necessário estudar a série nos pontos $-2$ e $4$.)

   b) Directamente dos coeficientes da série de Taylor obtem-se: $g(1) = 0$ e $g''(1) = \frac{\sqrt{2}}{9}$. A série de Taylor de $x + g'(x)$ no ponto 1 é

$$1 + (x-1) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} = \frac{4}{3} + (1 + \frac{\sqrt{2}}{9})(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+1}}.$$

5. a) $\displaystyle\frac{x^4}{1-2x} = \sum_{n=4}^{\infty} 2^{n-4} x^n$, para $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

b) Temos $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e para $n \geq 4$, $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 2^{n-4} \Leftrightarrow f^{(n)}(0) = n!\,2^{n-4}$. Como $f^{(4)}(0) = 4! > 0$, $f$ tem um mínimo em 0.

---

**SUPEMENTARES**

1. a) $R = 1$; a série converge absolutamente para $-1 < x < 1$, converge simplesmente para $x = -1$ e diverge para $x < -1 \vee x \geq 1$.
   b) $R = 3$; a série converge absolutamente para $-2 < x < 4$, diverge se $x \leq -2 \vee x \geq 4$.
   c) $R = 1$; a série converge absolutamente para $-2 < x < 0$, converge simplesmente para $x = -2$ e diverge para $x < -2 \vee x \geq 0$.
   d) $R = 1$; a série converge absolutamente para $0 \leq x \leq 2$, e diverge para $x < 0 \vee x > 2$.
   e) $R = |a|$; a série converge absolutamente para $-a - |a| < x < a - |a|$ (ou seja, para $a > 0$, $-2a < x < 0$, para $a < 0$, $0 < x < -2a$) e diverge para $x \leq -a - |a| \vee x \geq a - |a|$ (se $|x + a| = |a|$, as séries obtidas têm um termo geral que não converge para 0).
   f) $R = +\infty$; a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. a) Fazer $y = (1-3x)^2$. A série é absolutamente convergente se $-4 < y < 4 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{3}, 1\right[$, simplesmente convergente se $x = 1$ e divergente se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup ]1, +\infty]$.
   b) Fazer $y = (2x)^3$. A série é absolutamente convergente se $-1 < y < 1 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, simplesmente convergente se $x = -\frac{1}{2}$ e divergente se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[ \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$.
   c) É uma série geométrica de razão $\frac{x}{x+1}$, logo converge absolutamente se $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$ e diverge se $\left|\frac{x}{x+1}\right| \geq 1$. Resolvendo em ordem a $x$, temos $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$, ou seja $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$ converge absolutamente para $x > -\frac{1}{2}$ e diverge para $x \leq -\frac{1}{2}$.
   d) o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}y^n$ é $R = 1$ e esta série converge absoutamente para $|y| < 1$, converge simplesmente para $y = -1$ e diverge para $y < -1 \vee y \geq 1$. Fazendo $y = \frac{x-2}{x}$, conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n$ converge absolutamente para $x > 1$, converge simplesmente para $x = 1$ e diverge para $x > 1$.

3. a) No ponto $-3$ a série dos módulos é dada por
$$\sum |a_n(-3)^n| = \sum |a_n| 3^n = \sum |a_n 3^n|$$
   Como no ponto 3 a série é divergente, a série $\sum a_n 3^n$ é divergente, e $\sum |a_n 3^n|$ é também divergente. Logo a convergência em $-3$ é simples.
   b) O raio de convergência da série é 3, uma vez que a convergência em $-3$ é simples (se $|x| < R$, a série converge absolutamente em $x$, se $|x| > R$, a série diverge em $x$, logo se a série converge simplesmente em $x$, tem-se $|x| = R$). Logo a série converge absolutamente para $|x| < 3$ e diverge para $|x| > 3$.
   c) Por exemplo, $\sum \frac{1}{n3^n}x^n$.

4. a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2} = \frac{x^2}{x+1}$, para $|x| < 1$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$, para $|y| < 1$).

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}} = \frac{x}{4(2-x)}$, para $|x| < 2$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^n = \frac{1}{2}(e^{-x} - 1)$, para $x \in \mathbb{R}$ (dado que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, y^n = e^y$, para $y \in \mathbb{R}$).

5. a) $\displaystyle(x-2)^2\, e^x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^2}{(n-2)!}(x-2)^n$, para $x \in \mathbb{R}$. Temos $f^{(n)}(2) = n(n-1)\, e^2$, $n \geq 2$, $f'(2) = 0$.

b) Da série de Taylor de $\frac{1}{x} = (\ln|x|)'$ no ponto $-1$ obtém-se, para $-2 < x < 0$,

$$\ln|x| = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x+1)^n, \qquad f^{(n)}(-1) = (n-1)!.$$

c) $\displaystyle\left(\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)' = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$, para $x \in \mathbb{R}$, e $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$.

Temos $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!\, \frac{1}{n!(2n+1)} = \frac{(2n)!}{n!}$ e $f^{(2n)}(0) = 0$.

d) $\displaystyle\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n x^n$, para $|x| < 1$ (obtenha primeiro a série da primitiva).

Temos $f^{(n)}(0) = n!(n+1)(-1)^n = (n+1)!(-1)^n$.

6. a) $\displaystyle e^{3x-2} = e^{-2} \cdot e^{3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{e^2 n!}\, x^n$, para $x \in \mathbb{R}$. Temos $f^{(n)}(0) = \frac{3^n}{e^2}$.

b) $\displaystyle\frac{2x}{4x+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, 2^{2n-1} x^n$, para $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Temos $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{n-1} 2^{2n-1}$.

c) $\displaystyle\operatorname{sen}(x-1)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-1)^{4n+2}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Temos $f^{(4n+2)}(1) = (4n+2)! \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $f^{(k)}(1) = 0$, se $k \neq 4n+2$.

d) Como f), notando que $\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n}$.

e) $\displaystyle\frac{1}{2+x} = \frac{1}{4}\, \frac{1}{1 + \frac{x-2}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-2)^n$, para $-2 < x < 6$.

Temos $f^{(n)}(2) = \frac{n!(-1)^n}{4^{n+1}}$.

f) $\displaystyle x \operatorname{arctg}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+2}$, para $-1/2 < x < 1/2$

Temos $f^{(2n+2)}(0) = (2n+2)!\, \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1}$, e $f^{(k)}(0) = 0$ para $k \neq 2n+2$.

7. $\displaystyle\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n$, para $|y| < 1$, logo $\displaystyle\phi(x) = x\ln(1+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{3n+1}$, para $-1 < x < 1$. Deste desenvolvimento obtém-se $\phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0$, $\quad \phi^{(4)}(0) = 4! > 0$, e, portanto a função tem mínimo em 0.

8. Do Teorema Fundamental do Cálculo, $\phi'(x) = 2x\ln(1+x^4)$. Use o exercício anterior para obter o desenvolvimento de $\phi'(x)$ para $|x| < 1$, e obtenha, por primitivação (tendo o cuidado de ajustar a respectiva constante de primitivação),

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n+1)} x^{4n+2}$$

.

Como $\phi^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ e $\phi^{(6)}(0) = 6!\,\frac{1}{3} > 0$, $\phi$ tem um mínimo em 0.