

FICHA 13 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. Usa-se o Critério geral de Comparação. Convergentes: a), b), d), Divergente: c)
2. Usa-se o Critério de d'Alembert em a), b), c) e o Critério da Raiz / de Cauchy em d). Divergentes: c); Convergentes: a), b), d) .
3. i) Temos que $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \geq 2$, é uma função crescente e positiva, e que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln |\ln x|]_2^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |\ln b| - \ln |\ln 2| = +\infty.$$

Logo, do critério do integral, a série $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

- ii) Temos $\frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}$. Logo, como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, do Critério Geral de Comparação,

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ também converge.

4. a) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
 b) converge - critério de d'Alembert;
 c) converge - critério de d'Alembert;
 d) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt[3]{n} \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{13}{12}}}$;
 e) converge - critério da raiz;
 f) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
5.
 - $\sum(1 + a_n)$ diverge, uma vez que $1 + a_n > 1$, logo o termo geral não converge para 0.
 - $\sum \frac{1}{n^2 + a_n}$ converge, uma vez que $\frac{1}{n^2 + a_n} < \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ é convergente.
6. Comece por notar que $|a_n| \rightarrow 0$, e portanto, a partir de certa ordem, $|a_n| < 1$, donde, $0 \leq |a_n|^p \leq |a_n|$. O critério geral de comparação e as hipóteses consideradas estabelecem então a convergência absoluta de $\sum a_n^p$. Para $p > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Para $p = 1$: a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
7. a) A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, que é divergente por comparação com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Concluímos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \rightarrow 0$, $a_n > 0$ e (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.
 b) É absolutamente convergente, comparar a série dos módulos com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
 c) É absolutamente convergente: é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{4}$.
 d) É divergente: o termo geral tem dois sublimites 1 e -1 , logo é divergente. Como o termo geral não converge para 0, a série é divergente.

- e) É simplesmente convergente, escrevendo $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
 f) É simplesmente convergente.

SUPLEMENTARES

1. Usa-se o Critério geral de Comparação. Divergentes: a), b), c), e), f), g), h). Convergente: d).
 2. Usa-se o Critério de d'Alembert em a), b), c) d) e o Critério da Raiz / de Cauchy em e). Divergentes: b), d) se $a \geq b$, e). Convergentes: a), c) .
 3. a) i) Critério do Integral com $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, $x \geq 2$: a série converge.
 ii) Temos

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n} \ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \rightarrow +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\sqrt{n} \ln n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do Critério Geral de Comparação, a série diverge.

4. a) Comece por verificar que, com as hipóteses dadas, os termos das séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ são não negativos, a partir de alguma ordem. Obtenha que as hipóteses dadas implicam também que $\lim \frac{f(a_n)}{a_n} = L$ e conclua o resultado usando o critério geral de comparação.
 b) Segue directamente de a), notando que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arctg}(x)}{x} = 1$$

que as séries dadas convergem se e só se $\alpha > 1$, por comparação com as séries de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

5. a) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$;
 b) diverge - o termo geral não tende para 0;
 c) diverge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$;
 d) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
 e) converge - critério de d'Alembert;
 f) diverge - o termo geral não tende para 0;
 g) diverge - critério de d'Alembert;
 h) converge - $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^3}$, comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.
 i) diverge - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - série harmónica;
 j) diverge - o termo geral não converge para 0;
 k) converge - critério da raiz;
 l) converge - critério da raiz;

- m) converge - critério da raiz;
 n) converge - comparar com $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;
 o) diverge - o termo geral não tende para 0;
6. a) se (b_n) é limitada, com $|b_n| < c$, então $|a_n b_n| < c|a_n| = ca_n$, logo pelo critério geral de comparação, $\sum a_n b_n$ converge (absolutamente).
 b) se $\sum a_n$ converge, então $\lim a_n = 0$, logo (a_n) é limitada, e por (a), também converge $\sum a_n^2$.
 c) com $a_n = \frac{1}{n}$, tem-se $\sum \frac{1}{n}$ divergente e $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente.
7. a) É uma série alternada. A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é divergente (uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$). Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \rightarrow 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} > 0$$

ou seja, (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

- b) É simplesmente convergente (proceder como na alínea anterior).
 c) É absolutamente convergente: é uma série geométrica de razão $-\frac{1}{3}$.
 d) e) f) são simplesmente convergentes.