

FICHA 12 - SOLUÇÕES**AULA PRÁTICA**

1. a) $\frac{\ln 4 - \pi}{8}$; b) $\frac{1}{3} - \ln 3$; c) $2 + \ln \frac{2}{e^2 + 1}$; d) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$; e) $\frac{3}{2} \ln \left(\frac{5}{2}\right)$; f) $\frac{1}{2}$;
 g) $\arctg(3/4)$; h) $\frac{1}{2}(\ln(\sqrt{5} + 2) - \ln(\sqrt{5} - 2) - \ln 5)$.

2. Use a substituição $u = \frac{1}{t}$ no integral que representa $F\left(\frac{1}{x}\right)$ e obtenha a expressão de $F(x)$.

3. a) $A = 2 \int_0^2 4 - x^2 - (x - 2) dx = \frac{44}{3}$;

b) $A = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}) dx = \frac{1}{12}$,

c) $A = \int_0^1 (1 - xe^{x-1}) dx = 1 - \frac{1}{e}$.

d) $A = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2..$

e) $A = \int_0^1 \arctg x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

f) $A = 2 \int_0^1 (\sqrt{2(2-x)} - \sqrt{4(1-x)}) dx + 2 \int_1^2 \sqrt{2(2-x)} dx = 2$

OU integrar em y : $A = 2 \int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} - 1 + \frac{y^2}{4}\right) dy$.

4. $A = 4 \int_0^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx = 2\pi$ (substituição $x = 2 \operatorname{sen} t$).

5. $A = \int_0^1 \left(\arctg x - \frac{\pi}{16}x^2\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16}x^2\right) dx = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{3}$.

6. a) $A = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_1^2 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}$.

b) $A = \int_0^1 (4x - x) dx + \int_1^2 (4x - x^3) dx = \frac{15}{4}$.

c) $A = \int_{-1}^1 2(x+1) - (x+1)^2 dx = \frac{4}{3}$.

d) $A = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + y^2} dy = -\frac{\pi}{4}$ (fazendo $y = \ln x$).

e) $A = \int_0^1 (1-x) \arctg x dx = \frac{1 - \ln 2}{2}$.

f) $A = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{3 - e^x} dx = \frac{2}{3} \ln 2$ (fazendo $y = e^x$).

7. Todos os resultados podem ser obtidos partindo da série geométrica, notando que para

$$-1 < r < 1, \sum_{n=p}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0 r^p}{1-r}.$$

8. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n) - \ln(n+1)),$ diverge.

9. a) diverge, o termo geral não tende para 0;

b) Diverge, uma vez que o seu termo geral não converge para 0.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi^{-n+2} = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\pi} \right)^n,$ série geométrica de razão $-\frac{1}{\pi},$ converge, porque $\left| -\frac{1}{\pi} \right| < 1,$ e $s = -\frac{\pi^2}{1+\pi};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \left(-\frac{1}{4} \right)^n,$ converge uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n$ converge - por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{3}{4} < 1$ - e $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} \right)^n$ - também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{4},$ e $\left| -\frac{1}{4} \right| < 1.$ A soma é $s = 3 - \frac{1}{5} = \frac{14}{5};$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} + 1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ diverge, uma vez que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$ diverge por ser uma série geométrica de razão $\frac{4}{3} > 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge por ser uma série geométrica de razão $0 < \frac{1}{3} < 1.$ (Alternativamente: diverge uma vez que o seu termo geral não converge para 0.)

f) É uma série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} - a_n,$ com $a_n = \arctg(n),$ logo converge uma vez uma vez que $a_n \rightarrow \frac{\pi}{2},$ e a sua soma é $s = \lim a_n - a_1 = \frac{\pi}{4}.$

SUPLEMENTARES

1. a) $\frac{\pi^2}{32};$ b) $\frac{2}{15}$ (escreva $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$); c) $\ln \frac{2}{3};$ d) $\frac{14}{3};$ e) $\frac{1}{2} \ln 2$;
 f) $\frac{\pi}{4}$ (note que $\frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1}$); g) $\frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3};$ h) $\frac{3}{4}.$

2. a) $A = 2 \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (9 - x^2 - x^2) dx = 18\sqrt{2},$ b) $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3};$

c) $A = \int_0^1 e^x - (1-x) dx = e - \frac{3}{2}.$

$$d) A = \int_0^{e-1} 2 \ln(1+x) dx = 2.$$

$$e) A = \int_{-1}^1 \ln 2 - \ln(1+x^2) dx = 4 - \pi.$$

$$f) A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - x^2 + \frac{\pi^2}{4} \right) dx = 2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

$$g) A = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x) dx = 3 - e.$$

$$h) A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2}.$$

$$i) A = \int_{-2}^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{-x}{8} \right) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(-27x - \frac{-x}{8} \right) dx = \frac{15}{4}.$$

$$3. A = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3x^2} \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (substituição } x = 2 \sin t \text{ para primitivar } \sqrt{4-x^2}).$$

$$4. a) A = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2) dx = \frac{7}{48}.$$

$$b) A = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{3}.$$

$$c) A = \int_1^a \ln x dx = a(\ln a - 1) + 1.$$

$$d) A = \int_0^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}} dx = \frac{2\pi}{12} \text{ (fazendo } y = \sqrt{x+2}).$$

$$e) A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = 1.$$

$$f) A = \int_0^1 \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}.$$

5. Considerando a mudança de variável sugerida: $tx = y \Leftrightarrow t = \frac{y}{x}$ e $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{x}$ logo

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx) dt = \frac{1}{x} \int_1^{\frac{1}{x}} f(y) dy.$$

que se pode diferenciar usando a derivada do produto, o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta.

6. Use a mudança de variável $y = 1/x$.

7. Todos os resultados podem ser obtidos partindo da série geométrica, notando que para

$$-1 < r < 1, \sum_{n=p}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0 r^p}{1-r}.$$

$$8. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4} \text{ (como a)};$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

9. a) Da Ficha 2- Suplementares Exercício 4.c) temos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Da definição de série numérica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \lim s_n = \lim 2 - \frac{n+2}{2^n} = 2.$$

Para as outras alíneas: usar Ex.1.f) e Ex.4.d), Suplementares e Ex. 4.b) - Aula Prática.

10. a) série geométrica de razão $\frac{e}{\pi^2}$, converge uma vez que $|\frac{e}{\pi^2}| < 1$, e $s = \frac{\pi^2}{\pi^2 - e}$;

b) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+1}$, com $a_n = -\sqrt{n}$, logo diverge, uma vez que (a_n) diverge;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}} = \frac{e}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{e}\right)^n$, série geométrica de razão $\frac{-2}{e}$, logo converge porque $|\frac{-2}{e}| < 1$, e $s = -\frac{e}{e+2}$;

d) série de Mengoli da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_{n+2}$, com $a_n = \frac{1}{n!}$, logo converge com $s = a_1 + a_2 - 2 \lim a_n = \frac{3}{2}$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n) 2^{-n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, converge uma vez que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, por ser uma série geométrica de razão $0 \leq \frac{1}{2} < 1$, e $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ também converge, por ser uma série geométrica de razão $-\frac{1}{2}$, e $|\frac{-1}{2}| < 1$. A soma é $s = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.