FICHA 11 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. a) Se f é contínua em $[a,b]$ e $c \in]a,b[$ com $f(c)>0$, então $f(x)>0$ numa vizinhança $I = V_\epsilon(c) \subset [a,b]$ e portanto $\int_I f(x)dx > 0$. Então, $\int_a^b f(x)dx = \int_I f(x)dx + \int_{[a,b]\setminus I} f(x)dx \geq \int_I f(x)dx > 0$, onde se usou que $f \geq 0$. Se $c=a$ ou $c=b$, é análogo.

   b) É equivalente a a).

2. a) $5 = f(5/2)$; b) $3 = f(3)$; c) $1/2 = f(1/2)$.

3. a) $-\cos x^2$ b) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$ c) $\int_1^{x^2} \cos(\sqrt{t})\, dt + 2x^2 \cos|x|$.

4. Como f é diferenciável, e portanto contínua, podemos derivar ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo) para concluir que $f'(x)=0$, para $x \neq 0$, ou seja, que f é constante em $]0,+\infty[$ e em $]-\infty,0[$. Da continuidade de f em $\mathbb{R}$ conclui-se então o resultado.

5. Use a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo: a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{2}{3}$.

6. a) $D_g =]-1,+\infty[$; g é estritamente crescente em $]-1,+\infty[$, pelo que não tem extremos.

   b) $D_h = \mathbb{R}$; h é estritamente crescente em $]1,+\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty,1[$, tendo um mínimo em 1.

7. a) $-\ln(2)$; b) $1/2$; c) $2\pi^3/4^3 = \pi^3/32$.

8. Todos com integração (ou primitivação) por partes: a) -1; b) $\dfrac{\ln 2}{4}$ c) $\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(\pi)$.

9. a) $[\mathrm{arctg}(2t)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\pi}{12}$; b) $\left[-\sqrt{1-t^2} + \mathrm{arcsen}\, t\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{6}$;

   c) $\left[\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^3 = \dfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 2) = \ln\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

   d) $\dfrac{1}{2}\left[\ln|t+1| - \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + \mathrm{arctg}\, t\right]_0^1 = \dfrac{1}{8}(\pi + \log 4)$; e) $[2\,\mathrm{arctg}(t)]_0^1 = \pi/2$;

   f) $[\cos t]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2}$.

SUPLEMENTARES

1. a) Tomando uma decomposição de $[0,2]$ da forma $d = \{0, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon, 2\}$, verifique que neste caso $S_d(f) - s_d(f) = 4\varepsilon$. É suficiente tomar, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < \frac{1}{4n}$ (por exemplo, $\varepsilon = 1/4(n+1)$).

   b) Da alínea anterior $\lim S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) = 0$ logo f é integrável em $[0,2]$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = \lim S_{d_n}(f) = 4$.

2. a) Temos que $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = b = \sup_{x\in[a,b]} x$, para quaisquer $a, b \in [0,1]$. Logo, para qualquer decomposição do intervalo $[0,1]$, temos $S_d(f) = S_d(x)$ e assim

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf S_d(f) = \inf S_d(x) = \overline{\int_0^1} x\,dx = \int_0^1 x\,dx = 1/2,$$

já que x é integrável.

b) Por outro lado, $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$, já que $\inf_{x\in[a,b]} f(x) = 0$, para quaisquer $a, b \in [0,1]$, logo

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx$$

e assim f não é integrável.

3. a) Basta notar que se $f(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$, então do T. Valor Intermédio, f não muda de sinal em $[a,b]$, e fazer como no Ex. 1 da Ficha 11.

b) Fazer $h = f - g$ e usar a).

4. Se fosse $f(c) > 0$ (respectivamente $f(c) < 0$) para algum $c \in \mathbb{R}$ então $\int_I f(x)dx > 0$ (respectivamente $\int_I f(x)dx < 0$) numa vizinhança $I = V_\epsilon(c)$. OU Usar o Teorema Fundamental do Cálculo, notando que $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo $f(x) = 0,\ x \neq 1,\ f(1) \neq 0$.

5. Começe por aplicar o Teorema de Weierstrass a f em $[a,b]$ para garantir a existência de $m = \min f([a,b])$ e $M = \max f([a,b])$. Obtenha as desigualdades

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M\,,$$

e aplique o Teorema do Valor Intermédio (Teorema de Bolzano) para obter o resultado pedido.

6. a) $\operatorname{sen} x^2$, b) $2e^{4x^2} - e^{x^2}$, c) $4x^3 \operatorname{sen}(x^2) - 2x\operatorname{sen}(|x|)$.

7. Verifique que está nas condições de aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo, aplique-o para obter ψ' e verifique que pode voltar a usar o Teorema Fundamental do Cálculo para obter ψ''.

8. Use o Teorema Fundamental do Cálculo em conjunto com a regra de derivação da função composta para obter $\psi'(x) = 0$, para $x \in]0, \pi/2[$.

9. Em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: F é o produto de duas funções diferenciáveis (justifique) e, logo, contínuas. Em 0, usando a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo, prove que F é contínua. Mostre, igualmente recorrendo à regra de Cauchy e ao Teorema Fundamental do Cálculo, que F é diferenciável em 0 se e só se f é diferenciável em 0, caso em que, $F'(0) = \frac{f'(0)}{2}$.

10. Da continuidade de u e v, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para derivar os integrais indefinidos e provar que $u = v$.

11. Use a regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo: $-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$.

12. a) $D_f = \mathbb{R}$; f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ (note que f é par) ; tendo um mínimo em 0.

    b) $D_g = \mathbb{R}^+$; g é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$, pelo que não tem extremos.

13. a) Use o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra de derivação da função composta para obter g' e g'' e com base no estudo do sinal destas funções obtenha que: g é crescente em $]-\infty, 2[$, decrescente em $]2, +\infty[$, tendo máximo em 2, e a concavidade do gráfico de g está virada para baixo.

    b) É majorada: $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ g(x) \leq g(2)$.
    Obtenha $\lim_{x\to+\infty} g(x) \leq \lim_{x\to+\infty} f(0)(x^2 - 4x + 3) = -\infty$, o que lhe permite concluir que g não é minorada.

14. a) $\ln 2$; b) 0; c) 0; d) 2; e) $\frac{1}{2}(1-e)$;

15. Com integração (ou primitivação) por partes: a) $\dfrac{\ln 2 - 1}{2} = \ln\sqrt{\dfrac{2}{e}}$; b) $\dfrac{-1 + \pi\,\mathrm{sh}(1/2)}{1+\pi^2}$;

16. Uma vez que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(x) = e^{-x^2}$, aplicando o método de integração por partes a $\displaystyle\int_0^1 1 \cdot F(x)dx$ obtém o resultado desejado.

17. a) $\left[\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{t-2}{t+2}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}\right| - \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2}\right| = \ln\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}\right)$;

    b) $\left[\dfrac{1}{8}\operatorname{sen}(2t) + \dfrac{t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{8}$;

    c) $\left[8\ln|t| - 4\ln(1+t^2)\right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = 8\ln(\sqrt{3}/2) - 8\ln(1/2) - 4\ln(7/4) + 4\ln(5/4) = 4\ln(15/7)$.

    d) $[\operatorname{arctg}(t)]_{-1}^{0} = \dfrac{\pi}{4}$;