FICHA 9 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. Em $a = 0$: $p_{2,0}(x) = 1 - x + x^2$; em $a = 1$: $p_{2,1}(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1)^2$. Tem um extremo local em $a = 1$, já que $f'(1) = 0$, $f''(1) = -1 \neq 0$ (máximo, porque $f''(1) < 0$).

2. Temos $p_{4,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4$.

   a) Por comparação de coeficientes com a expressão geral de $p_{4,0}(x)$: $f^{(0)}(0) = f(0) = -1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2$, $f^{(3)}(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = 3!$ não tem extremo em a (a primeira derivada não nula é de ordem ímpar).

   b) Calcular as derivadas $p_{4,1}^{(k)}(1) = f^{(k)}(1)$: $f(1) = -1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 3, 4$, $f^{(2)}(1) = -2 < 0$ tem um máximo em 2.
   (Alternativamente, escrever $p_{4,1}(x) = -2 + 2x - x^2 = -2 + 2x - (x-1)^2 - 2x + 1 = -1 - (x-1)^2$ e comparar coeficientes.)

3. $p(x) = -12 + 2(x-3) + (x-3)^2$.

4. Usa-se $f(x) = \sqrt{x}$ com $a = 100$. Recta tangente: $y = p_1(x) := 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$. A aproximação dada pela recta tangente fornece $p_1(99,7) = 9,985$. Do sinal da segunda derivada, depreende-se que o resto de Lagrange é negativo (verifique!), pelo que a aproximação é por excesso.

5. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 4 de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $a = 0$: $f^{(4)}(0) = f^{(2)}(0) = f(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f'(0) = 1$, logo $p_4(x) = p_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$, com resto de Lagrange $r_4(x) = \frac{\cos(c)}{5!}\, x^5$, com c entre 0 e x. Deduza então que, para $x \in [0, 1]$,

$$|\, r_4(x)| = \frac{|\cos(c)|}{5!}\, |x|^5 \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < 0.01.$$

6. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n para e^x em $a = 0$, com resto de Lagrange $r_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$. com $c \in]0, 0.1[$. Deduza que $|r_3(0.1)| \leq \frac{10^{-4}}{8}$ e que, portanto, a aproximação dada por $p_3(0.1) = 1 + 0.1 + \frac{0.01}{2} + \frac{0.001}{6} = 1,1051(6)$ difere do valor exacto de $e^{0.1}$, no máximo, de $\frac{10^{-4}}{8}$. Se tomarmos $1,052$ como aproximação final, introduzimos um erro adicional de $(1 - 0.(6)) \times 10^{-4}$. O erro total continuará inferior a 10^{-4}.

7.

   a) $2\sqrt{x} + \ln x - \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, b) $-\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}$, c) $3\ln|x+3|$, ,

   d) $-\dfrac{1}{x-2}$, e) $\dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{2^{3x}}{3\ln 2}$, f) $4\cosh(x/4)$, g) $-\dfrac{1}{2}\cos(2x)$,

   h) $\operatorname{arctg}(x/2)$, i) $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\right) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x)$.

8.

a) $\dfrac{1}{4}\ln(3+x^4)$, b) $2e^{\sqrt{x}}$, c) $-\cos(e^x)$, d) $\dfrac{(x^2-1)^6}{12}$, e) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\operatorname{sh} x)^3}$,

f) $-\dfrac{1}{1+e^x}$, g) $-\ln|\cos x|$, h) $P\left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) = P\left(\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right) = \ln(1+\operatorname{sen}^2 x)$,

i) $\dfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x$, j) $\operatorname{arctg}(\ln x)$, k) $\operatorname{arcsen}(e^x)$. l) $\dfrac{3}{1+\cos x}$, m) $\ln(\ln x)$,

n) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arcsen} x)^3}$, o) $\ln(\operatorname{arctg} x)$.

9. a) $f(x) = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x + 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} \ln(x-1)+3, & \text{se } x > 1 \\ \ln(1-x)+2, & \text{se } x < 1. \end{cases}$

SUPLEMENTARES

1. a) $p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$. Temos $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ e $f'''(0) = 0$ (verifique) logo $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

b) $p_5(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{2e}{3}x^4$.

2. a) $p(x) = 18 + 24(x-3) + 9(x-3)^2 + (x-3)^3$;

b) $p(x) = 81 + 108(x-3) + 54(x-3)^2 + 12(x-3)^3 + (x-3)^4$.

3. Por comparação de coeficientes com a expressão geral de $p_{n,a}(x)$:

a) $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$, $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1,2,3$, $f^{(4)}(0) = 4! > 0$ tem um mínimo em $a = 0$.

b) $p_{4,-1}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3 = (x+1)^3 - x = (x+1)^3 - (x+1) + 1$. Logo $f(-1) = 1$, $f'(-1) = -1$, $f^{(k)}(-1) = 0$, $k = 2,4$, $f^{(3)}(-1) = 6$ (ou calcular as derivadas $p_{4,-1}^{(k)}(-1)$), não tem extremo em a.

c) $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 0,1,2,4$, $f^{(3)}(0) = 3!$, $f^{(5)}(0) = -5!$. Não tem extremo em a.

d) $p_{5,1}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = \frac{((x-1)+1)^2}{2} - \frac{((x-1)+1)^4}{4} = \frac{1}{4} - (x-1)^2 - (x-1)^3 - \frac{(x-1)^4}{4}$. Logo, $f(1) = \frac{1}{4}$, $f'(1) = 0$, $f^{(2)}(1) = -2$, $f^{(3)}(1) = -3!$, $f^4(1) = -3!$, $f^5(1) = 0$ (alternativamente, calcular as derivadas $p_{5,1}^{(k)}(1)$). Tem máximo em a.

4. f tem um máximo relativo em 0. $p_4(x) = 1 - \frac{1}{4!}x^4$.

5. Usando sucessivamente a regra de derivação da função composta e os valores de $f^{(k)}(1)$, $k = 0,1,2$, deduzidos do polinómio de Taylor dado, obtêm-se

$$g(0) = f(1) = 2, \qquad g'(0) = f'(1) = -1, \qquad g''(0) = f'(1) + f''(1) = 3.$$

Logo, $p_2(x) = 2 - x + \frac{3}{2}x^2$.

6. a)
   - Relativa a $a = 0$: $f(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}e^{2c}x^3$, em que c está entre 0 e x.
     Relativa a $a = 1$: $f(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^{2c}(x-1)^3$, em que c está entre 1 e x.
   - Relativa a $a = 0$: $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+c)^3}x^3$, em que c está entre 0 e x.
     Relativa a $a = 1$: $f(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+c)^3}(x-1)^3$ em que c está entre 1 e x.
   - Relativa a $a = 0$: $f(x) = 1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi c)x^3$, em que $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$.
     Relativa a $a = 1$: $f(x) = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi c)(x-1)^3$ em que c está entre 1 e x.
   - Relativa a $a = 0$: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{(c+1)^{-5/2}}{16}x^3$, em que $c \in]0, x[$ ou $c \in]x, 0[$.
     Relativa a $a = 1$: $f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-1)^2 + \frac{(c+1)^{-5/2}}{16}(x-1)^3$, em que c está entre 1 e x.

   b) e^{2x}: para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left|\frac{4}{3}e^{2c}x^3\right| \leq \frac{4\sqrt{e}}{3 \cdot 2^3} = \dfrac{\sqrt{e}}{6} < \dfrac{1}{3}$.
   $\ln(1+x)$: para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left|\frac{1}{3}\frac{1}{(1+c)^3}x^3\right| \leq \frac{1}{24}$.
   $\cos(\pi x)$: para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left|\frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi c)x^3\right| \leq \frac{\pi^3}{48}$.
   $\sqrt{x+1}$: para $x \in]0, 1/2[$, temos também $c \in]0, 1/2[$ e $\left|\frac{(c+1)^{-5/2}}{16}x^3\right| \leq \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{128}$.

7. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2 em $a = 0$ da função exponencial com resto de Lagrange $r_2(x) = \frac{-e^{-c}}{3!}x^3$, com c entre 0 e x. Deduza então que $|r_2(x)| = \frac{e^{-c}}{3!}|x|^3 \leq \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$.

8. Nas condições dadas, f é n vezes diferenciável e o resto de Lagrange da fórmula de Taylor de ordem $n-1$ em $a = 0$ é identicamente nulo (deduza!). Nesse caso, $f(x)$ coincidirá cm $p_{n-1}(x)$ em $\mathbb{R}$ e, por coseguinte, será um polinómio de grau não superior a $n-1$.

9.

a) $\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}x^4$, b) $\dfrac{1}{7}x^7 + \dfrac{3}{5}x^5 + x^3 + x$; ,

c) $P\left(\dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\right) = P\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{5}\sqrt{x^5} - \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$,

d) $P\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}\right) = P\left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$,

e) $P\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}\right) = -\dfrac{1}{2}P\left(-2(1-2x)^{-\frac{1}{5}}\right) = -\dfrac{5}{8}(1-2x)^{\frac{4}{5}}$;

f) e^{x+3}; g) $\dfrac{1}{\ln 2}2^{x-1}$; h) $-e^{1-x}$, i) $\dfrac{1}{2}\ln|x + 1/2|$,

j) $\operatorname{tg} x$, k) $-2\operatorname{cotg} x$, l) $2\operatorname{arctg}(2x)$, m) $P(\operatorname{tg}^2 x) = P(\sec^2 x - 1) = \operatorname{tg} x - x$.

10.

a) $\frac{1}{2}\ln(1+2e^x)$, b) $\ln(1+\operatorname{sen} x)$, c) $-\,e^{1/x}$, d) e^{e^x},

e) $e^{\operatorname{tg} x}$, f) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2+2)$, g) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4}$, h) $\frac{5}{6}\sqrt[5]{(x^2-1)^6}$,

i) $-\operatorname{arctg}(\cos x)$, j) $-\dfrac{1}{4(1+x^4)}$, k) $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x$, l) $\dfrac{1}{\cos x} = \sec x$,

m) $\ln(2+\operatorname{ch} x)$, n) $\dfrac{1}{2(1-\alpha)}\dfrac{1}{(1+x^2)^{\alpha-1}}$, se $\alpha \neq 1$, $\ln\sqrt{1+x^2}$, se $\alpha = 1$.

11.

a) $\sqrt{2x^3}$, b) $-3\cos x + \frac{2}{3}x^3$, c) $\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|$, d) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$,

e) $\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$, f) $\frac{1}{2}e^{2\operatorname{sen} x}$, g) $-\dfrac{1}{x+1}$, h) $\ln\sqrt{1+x^2}$;

i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, j) $\dfrac{1}{4}P\left(\dfrac{4x^3}{(x^4)^2+1}\right) = \dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^4)$; k) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$, l) $\operatorname{sen}(\ln x)$,

m) $P\left(\cos x(1-2\operatorname{sen}^2 x)\right) = P\left(\cos x - 2\cos x \operatorname{sen}^2 x\right) = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x$, (ou por partes);

n) $P\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \ln|\operatorname{sen} x|$; o) $P\left(3^{\operatorname{sen}^2 x} 2\operatorname{sen} x\cos x\right) = P\left(3^{\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen}^2 x)'\right) = \dfrac{1}{\ln 3}3^{\operatorname{sen}^2 x}$;

p) $P\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) = 2P\left((\sqrt{x})'\operatorname{tg}\sqrt{x}\right) = -2\ln|\cos\sqrt{x}|$; q) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x\right)$,

r) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(e^x/2\right)$, s) $P\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + P\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen} x$,

t) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{2}x^2\right)$, u) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

12.

- $P(x\operatorname{sen}(x^2)) = \frac{1}{2}\cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \frac{1}{2}\cos(x^2) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
  a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + C = 0$, logo $C = -\frac{1}{2}$.
  b) $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ não existe, para qualquer $C \in \mathbb{R}$, logo não existe uma primitiva nas condições dadas.
- $P(\frac{e^x}{2+e^x}) = \ln(2+e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \ln(2+e^x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
  a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow \ln 3 + C = 0$, logo $C = -\ln 3$.
  b) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, para qualquer $C \in \mathbb{R}$, logo não existe uma primitiva nas condições dadas. .
- $P(\frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$, $x \in \mathbb{R}$, logo a forma geral das primitivas é $F(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
  a) $F(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

b) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)+C = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}+C$, logo $C = -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}$.

13. $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-1} + 1, & \text{se } x > 1, \\ -\frac{1}{x-1} + 10, & \text{se } x < 1. \end{cases}$