9ª **LISTA DE EXERCÍCIOS**

Fundamentos de Álgebra - LMAC e MMA

1º **semestre 2020/2021**

Problema 1. Mostre os seguintes factos:

1) Se G é um grupo cíclico, então G é abeliano.

2) Se G é um grupo finito de ordem p, p primo, então G é cíclico.

Problema 2. Mostre que se G é um grupo tal que $G/\mathrm{C}(G)$ é cíclico, então G é abeliano ($\mathrm{C}(G)$ é o centro de G).

Problema 3. Seja G um grupo.

a) Mostre que a intersecção de uma família de subgrupos normais de G é um subgrupo normal de G.

b) Mostre que se H e K são subgrupos normais de G, então $HK =$ $= \{hk,\ h \in H,\ k \in K\}$ também é um subgrupo normal de G.

c) Mostre que se H é um subgrupo de G de índice dois (isto é, $[G : H] = 2$), então H é um subgrupo normal de G.

Problema 4. Seja G um grupo finito e sejam H_1 e H_2 dois subgrupos de G. Mostre que

$$|H_1H_2| = \frac{|H_1||H_2|}{|H_1 \cap H_2|}.$$

Sugestão: Defina $f : H_1 \times H_2 \longrightarrow G$ da seguinte maneira: $f(h_1, h_2) = h_1h_2$. Mostre que $f^{-1}(h_1h_2) = \{\ (h_1k, k^{-1}h_2),\ k \in H_1 \cap H_2\}$, e que a cardinalidade de $f^{-1}(h_1, h_2)$ é a cardinalidade de $H_1 \cap H_2$, quaisquer que sejam $h_1 \in H_1$ e $h_2 \in H_2$.

Facto da aula: Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Considere a acção de G em G/H, $T : G \longrightarrow \mathrm{Sym}(G/H)$, definida da seguinte maneira:

dados $g, x \in G$ $(xH \in G/H)$,

$$(T(g))(xH) = gxH.$$

a) O núcleo de T, $\ker(T)$, é $\bigcap_{x\in G}(xHx^{-1})$.

b) $\ker(T)$ é o maior subgrupo normal de G contido em H.

Problema 5. Seja G um grupo finito e seja H um subgrupo de G de índice n (isto é, $[G : H] = n$). Mostre que H tem um subgrupo K, tal que K é normal em G e tal que o índice de K em G divide $n!$. (Sugestão: use o Facto acima.)

Problema 6. Seja G um grupo finito e seja p o menor primo que divide a ordem de G. Mostre que se H é um subgrupo de G de índice p, então H é normal.(Sugestão: use o problema 5.)