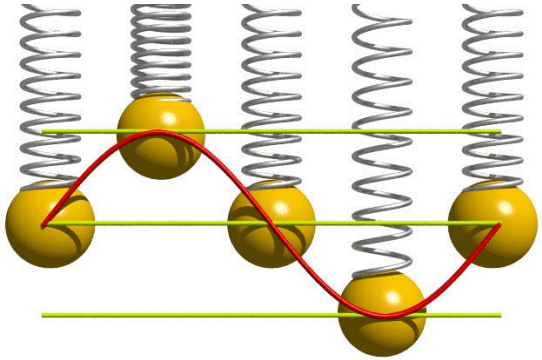
7/Maio/2018 – Aula 16

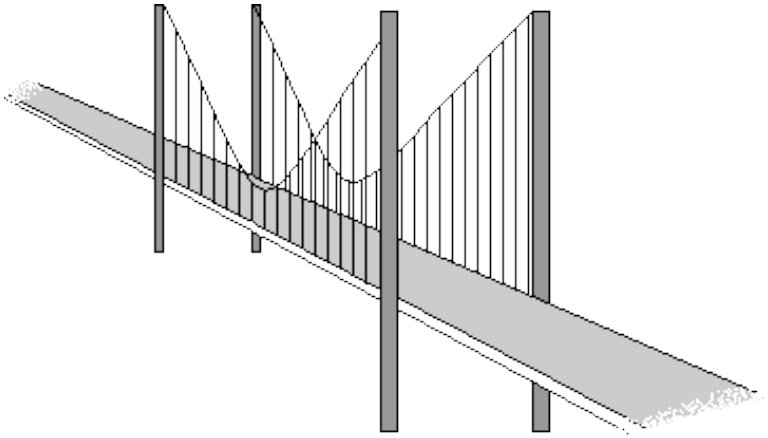
16 Movimento periódico
- 16.1 Movimento harmónico simples (MHS)
- 16.2 Conservação da energia no MHS



Friedrich A.Lohmüller, 2012

9/Maio/2018 – Aula 17

17 Movimentos oscilatórios, amortecidos e forçados
- **17.1 Movimento na vertical**
- **17.2 Pêndulo simples**
- **17.3 Pêndulo físico**
- **17.4 Oscilações amortecidas**
- **17.5 Oscilações forçadas**

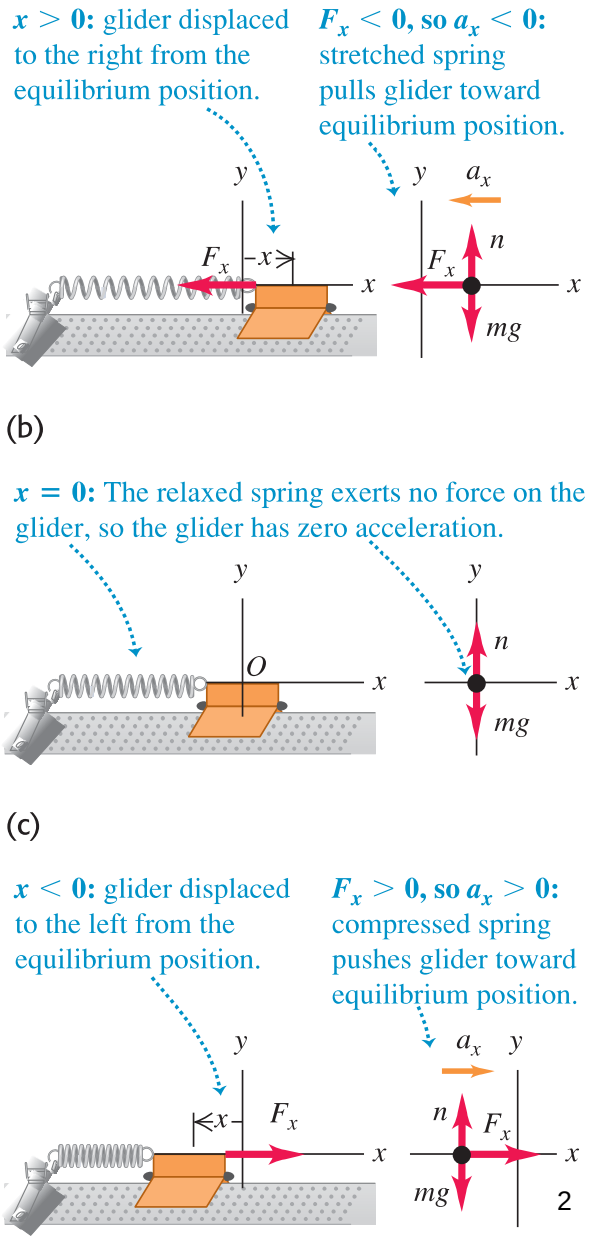


16. Movimento periódico

Um objeto que esteja ligado a uma mola, por exemplo, e que seja desviado da sua posição de equilíbrio, tende a voltar a essa posição: a mola exerce uma ***força de restituição****, o que causa um* ***movimento periódico (oscilação)****.*

Massa-mola

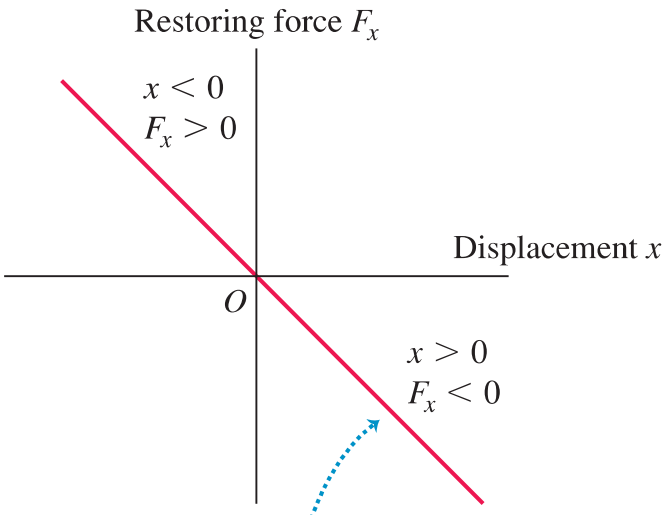
simulação



16.1 Movimento harmónico simples

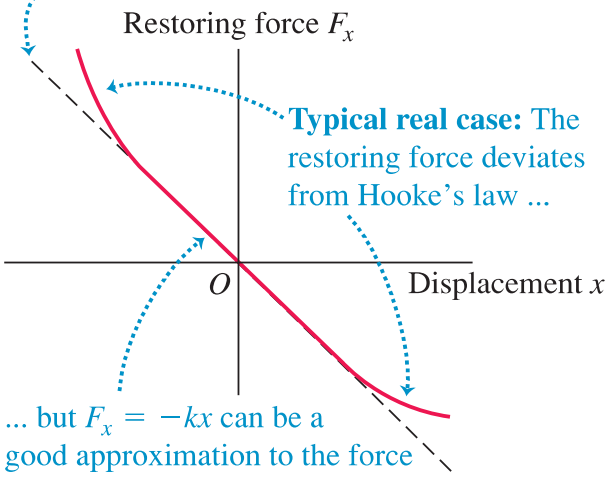
Quando a força de restituição é ***diretamente proporcional*** *ao afastamento da posição de equilíbrio, como no caso de molas ideais, tem-se um* ***movimento harmónico simples*** *(MHS).*

$$\vec{F} = -k\,\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$



The restoring force exerted by an idealized spring is directly proportional to the displacement (Hooke's law, $F_x = -kx$): the graph of F_x versus x is a straight line.

Ideal case: The restoring force obeys Hooke's law ($F_x = -kx$), so the graph of F_x versus x is a straight line.



16.1 Movimento harmónico simples

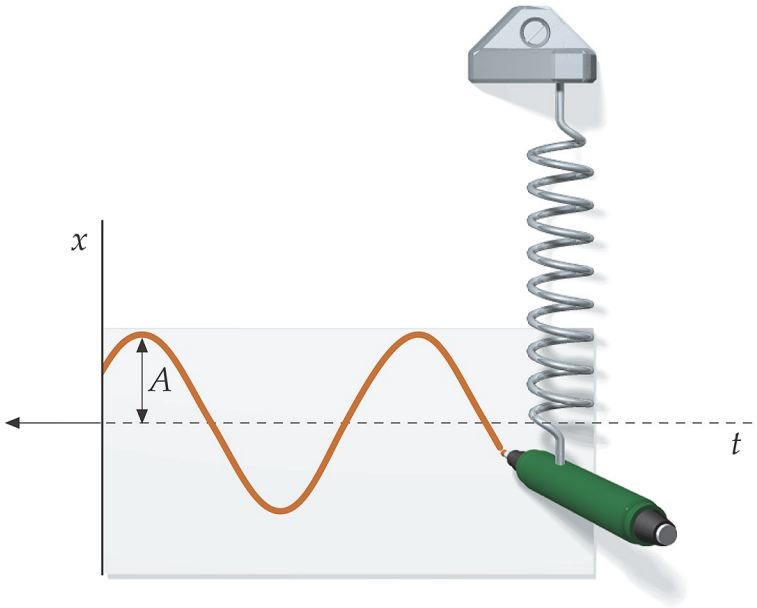
Solução da equação diferencial de 2ª ordem

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta)$$

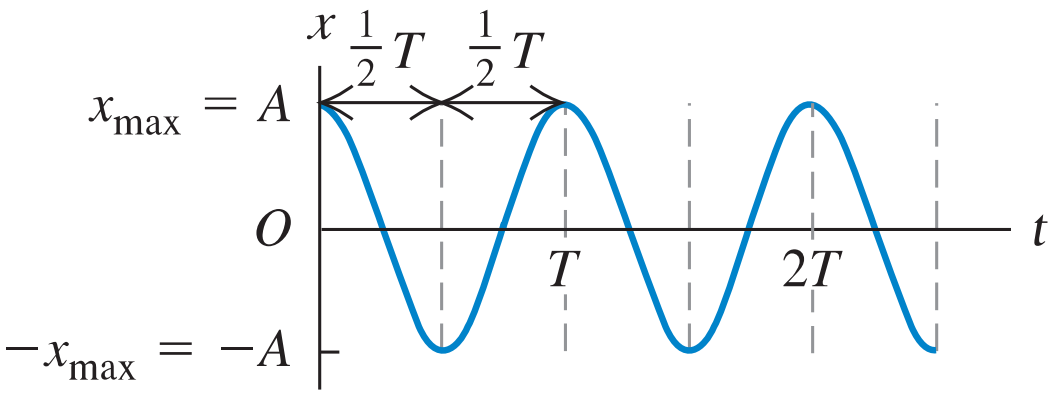
δ é a **fase** do movimento e

$$\omega = \sqrt{k/m}$$



Massa-mola

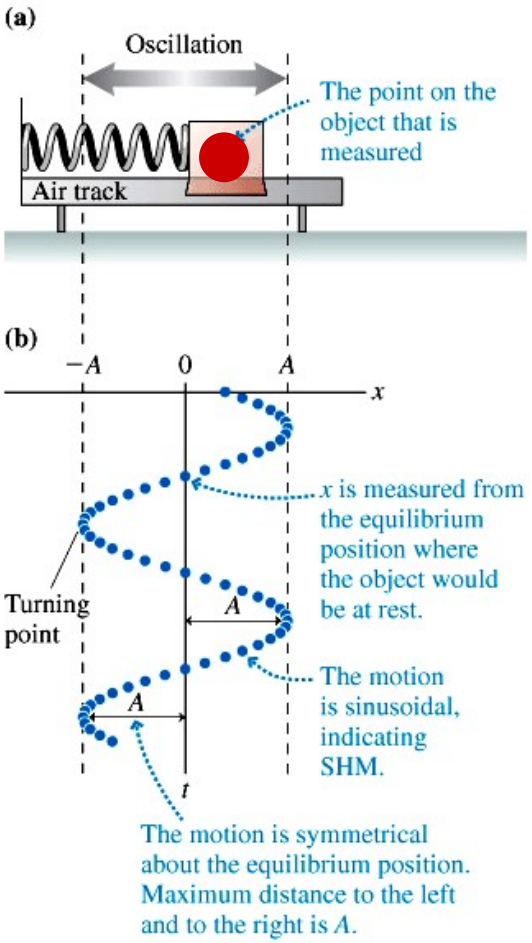
simulação



$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

16.1 Movimento harmónico simples

Velocidade e aceleração no ***movimento harmónico simples****:*

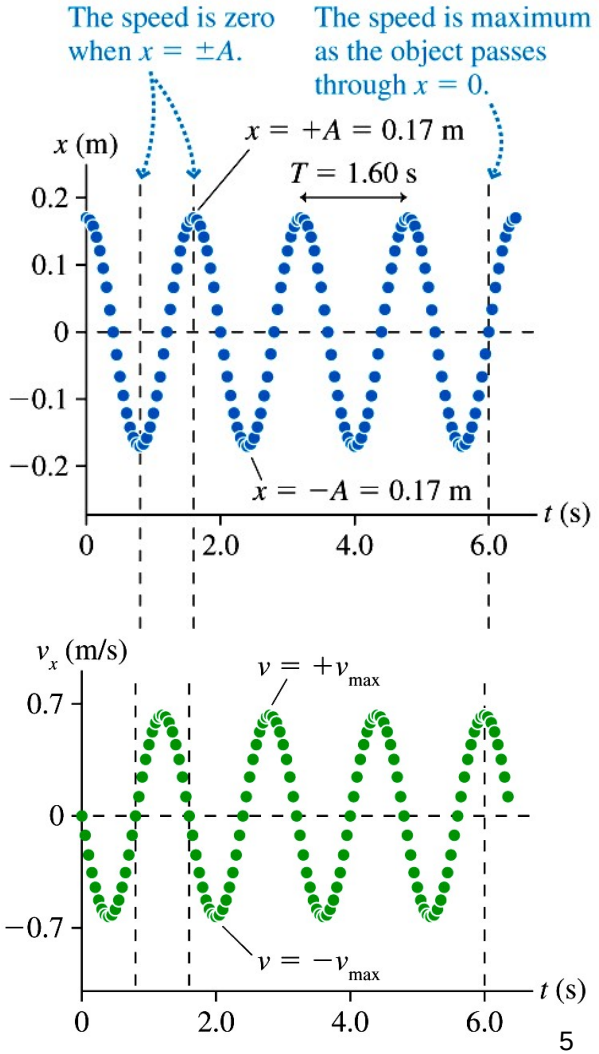


$$x(t) = A\cos\omega t$$

$$v_x(t) = -A\omega \operatorname{sen}\omega t$$

$$a_x(t) = -A\omega^2 \cos\omega t$$

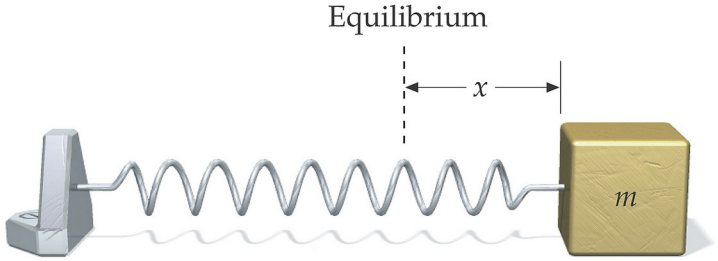
$$\boxed{a_x(t) = -\omega^2 x}$$



Exemplo

O bloco da figura é afastado 0,2 m da posição de equilíbrio e largado, no instante $t = 0$. *Efetua 15 oscilações completas em 10 s. Determine:*

a) o período T ; *b) a velocidade máxima; c) a posição e a velocidade em* $t = 0{,}8s$.



a) $$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow f = \frac{15\,\text{oscil}}{10\,\text{s}} = 1{,}5\ \text{Hz}$$

$$\Rightarrow T = 1/f = 0{,}667\ \text{s}$$

b) $$v_x(t) = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow v_{x,\max} \Rightarrow \text{sen}\,\omega t = -1 \Rightarrow v_{x,\max} = A\omega$$

$$v_{x,\max} = A(2\pi f) = (0{,}2\ \text{m})(2\pi)\left(1{,}5\,\text{s}^{-1}\right) = 1{,}88\ \text{m/s}$$

c) $$x = A\cos(\omega t + \delta) \Rightarrow x_{(t=0{,}8\text{s})} = (0{,}2\ \text{m})\cos\frac{2\pi(0{,}8\ \text{s})}{(0{,}667\ \text{s})} = 0{,}062\ \text{m}$$

$$v_x(t) = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t \Rightarrow v_{(t=0{,}8\text{s})} = -(1{,}88\ \text{m/s})\,\text{sen}\,\frac{2\pi(0{,}8\ \text{s})}{(0{,}667\ \text{s})}$$

$$(\delta = 0) \qquad = -1{,}79\ \text{m/s}$$

17.1 Movimento oscilatório na vertical

Quando um objeto se encontra pendurado na extremidade de uma mola vertical, fica sujeito ao seu peso, para além da força de restituição da mola.

Se o sistema estiver em equilíbrio:

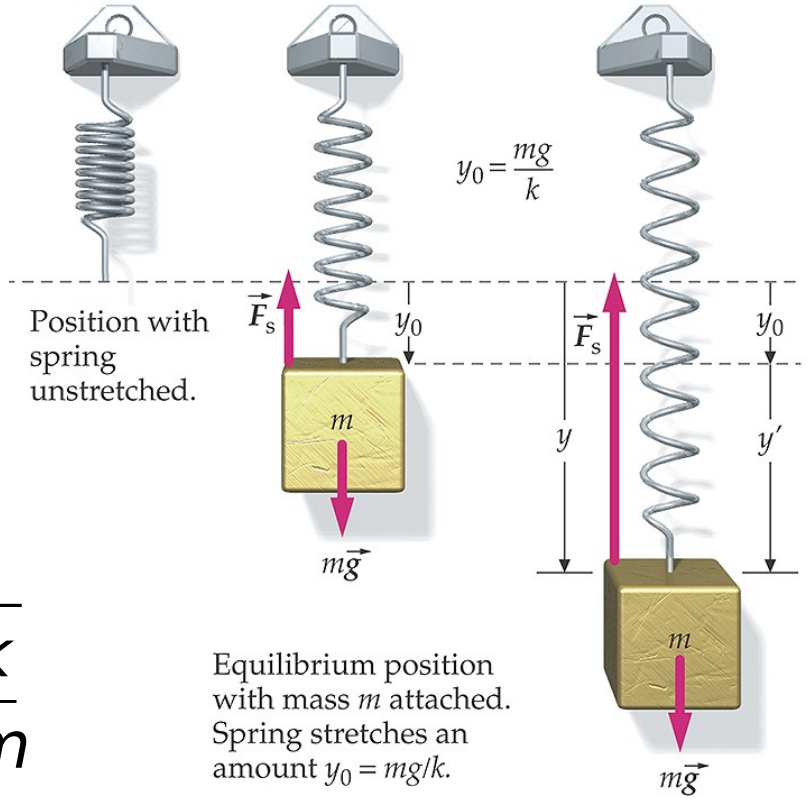
$$\sum F_y = -ky + mg = 0$$

Se se deslocar o sistema ligeiramente para fora do equilíbrio:

$$y' = y - y_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'$$

$$\Rightarrow \quad y' = A\cos(\omega t + \delta) \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}k(y')^2 + U_0$$

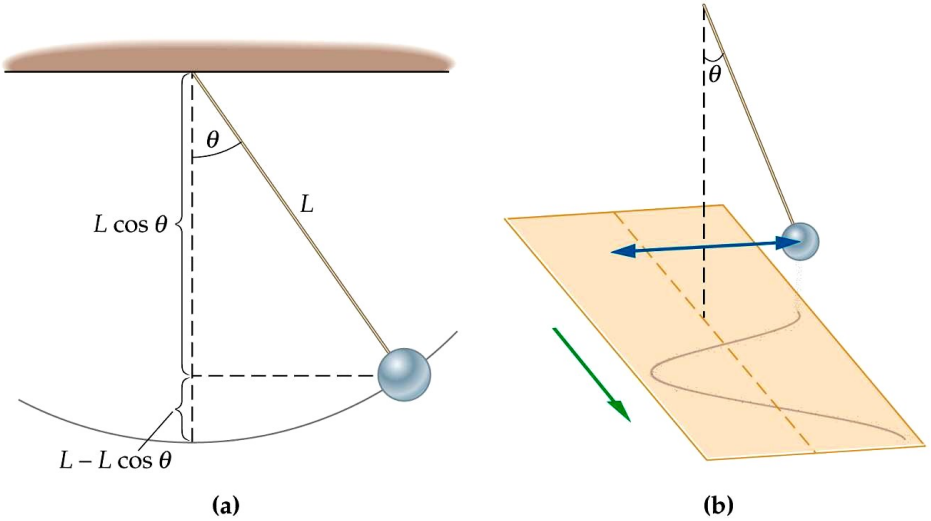


Object oscillates around the equilibrium position with a displacement $y' = y - y_0$.

17.2 Pêndulo simples

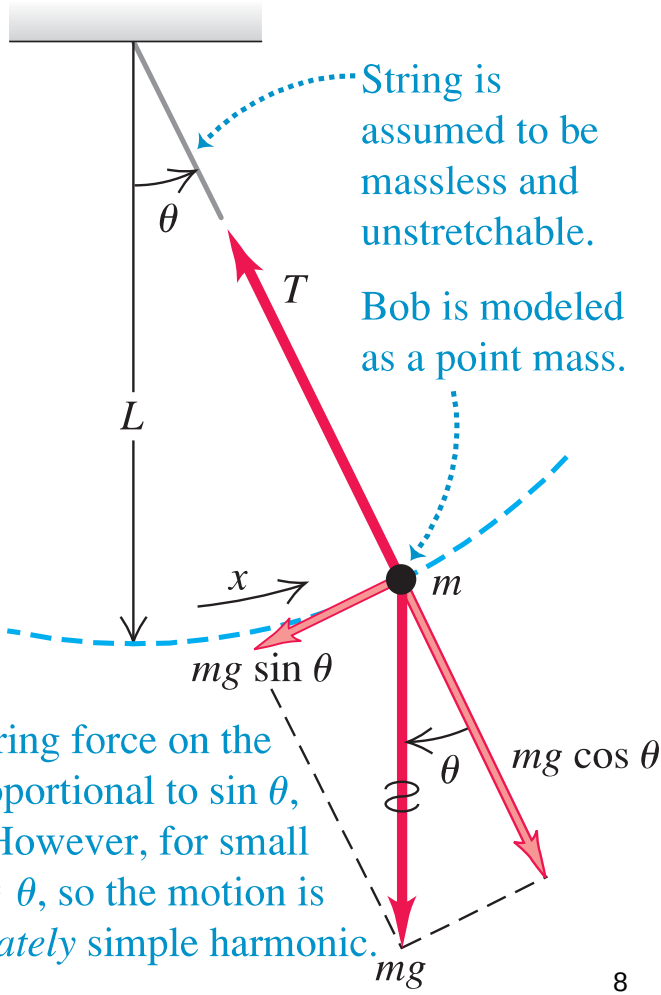
O chamado ***pêndulo simples*** *(ou* ***matemático****) consiste numa massa* m *, de dimensões desprezáveis, suspensa na extremidade de uma corda ou de uma barra, de comprimento* L *e massa desprezável.*

O ângulo θ *que o pêndulo faz com a vertical varia, no tempo, como um seno ou um cosseno.*



Pêndulo simples

simulação



17.2 Pêndulo simples

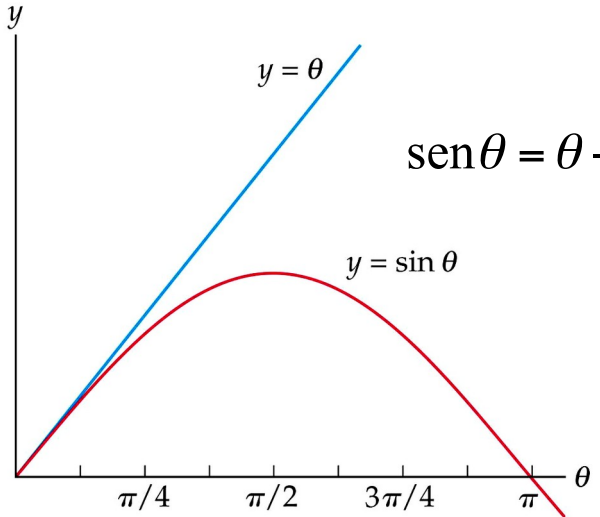
No pêndulo simples, a ***força de restituição*** *é proporcional a sen* θ*, enquanto no sistema massa-mola essa força é proporcional ao deslocamento (*θ*, neste caso):*

$$F = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \neq -mg\theta$$

$$\sum F = ma \quad \Rightarrow \quad -mg\,\mathrm{sen}\,\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad x = L\theta$$

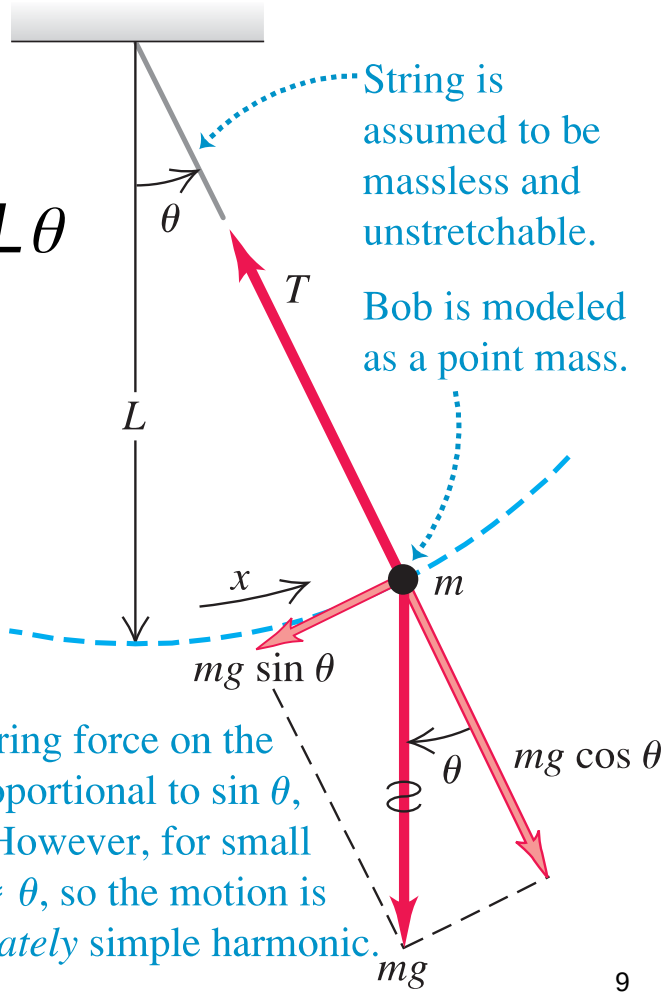
Para ângulos θ *suficientemente pequenos, o seno é aproximadamente igual ao próprio ângulo:*

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$$



$$\mathrm{sen}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \approx \theta$$

se $\theta << 1$



17.2 Pêndulo simples

Na aproximação dos ângulos pequenos, $\text{sen}\theta \approx \theta$ *, tem-se*

$$F = -mg\,\text{sen}\theta \approx -mg\theta = -mg\frac{x}{L}$$

Nestas condições, a força de restituição é proporcional ao deslocamento, pelo que

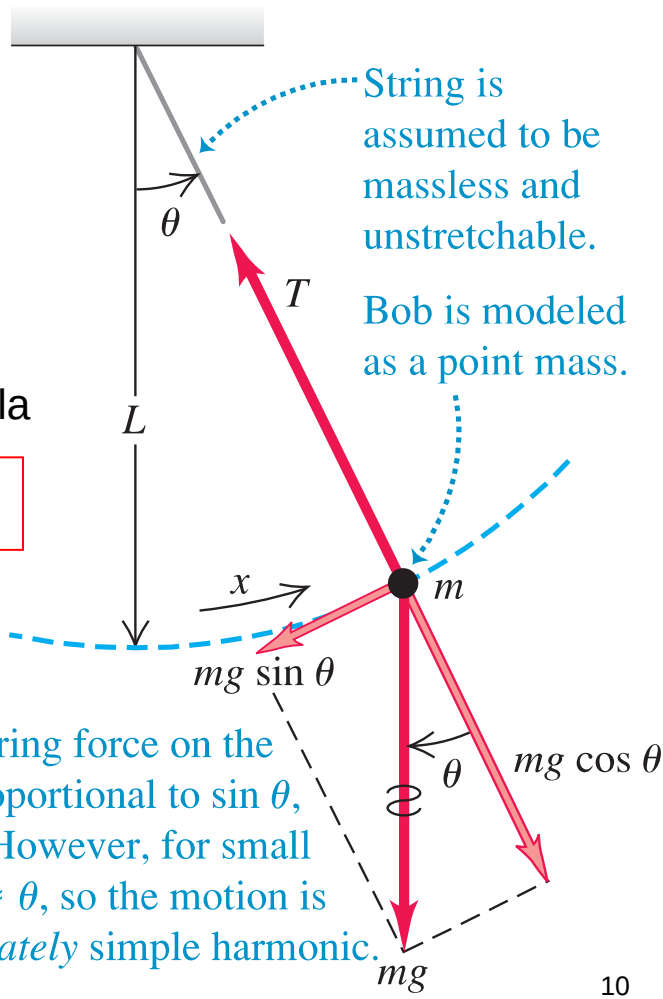
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Note-se que o período T *não depende da massa* m *do pêndulo.*

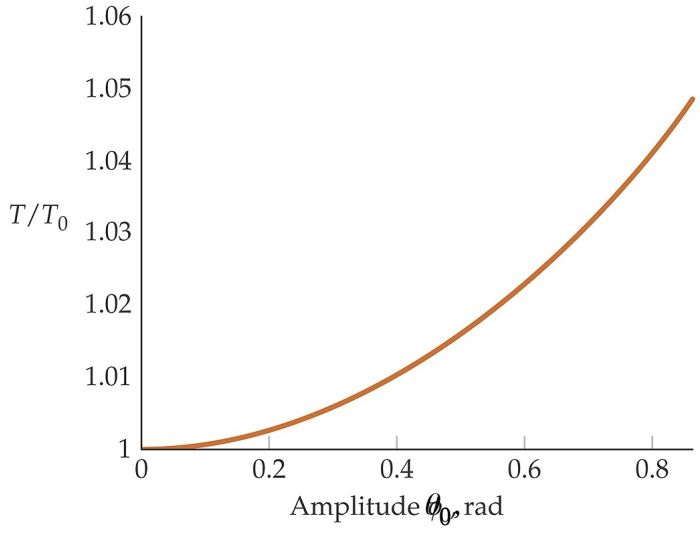
Pêndulo vs M.Mola

simulação



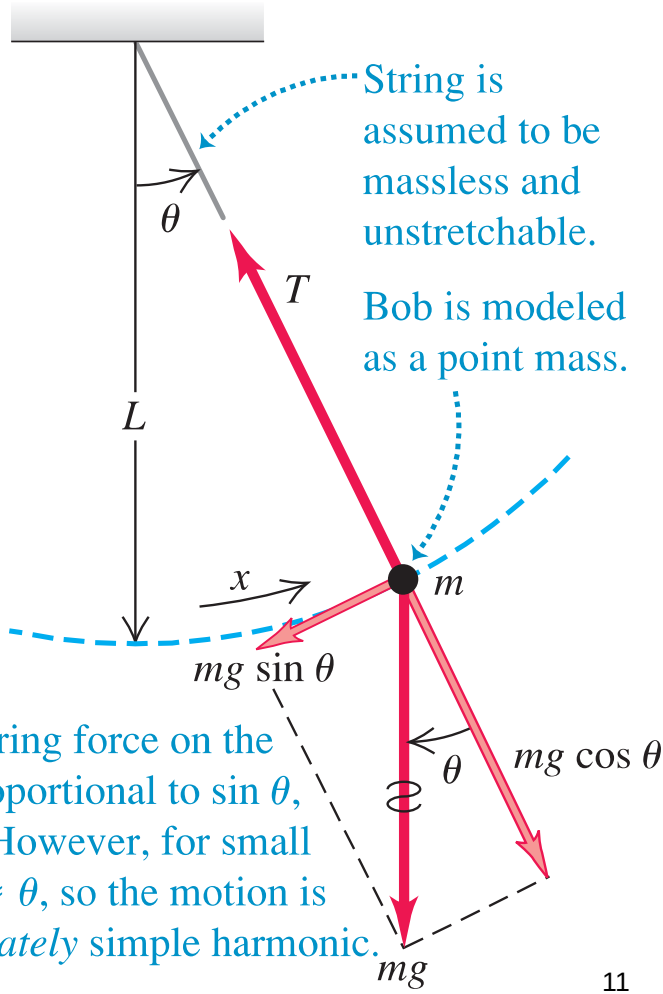
17.2 Pêndulo simples

Para ângulos de oscilação grandes, o período já depende do ângulo inicial:



$$T = T_0\left[1+\frac{1}{2^2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\operatorname{sen}^4\frac{\theta_0}{2}+\cdots\right]$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



The restoring force on the bob is proportional to sin θ, not to θ. However, for small θ, sin $\theta \approx \theta$, so the motion is *approximately* simple harmonic.

17.4 Oscilações amortecidas

Na maior parte dos sistemas físicos reais, existem forças não-conservativas que tendem a dissipar a energia. No caso dos movimentos oscilatórios, a presença dessas forças é visível na diminuição da amplitude das oscilações.

Por exemplo, no caso de ***atrito viscoso****, essas forças (ditas de* ***arrastamento****), são proporcionais à velocidade:*

$$\vec{D} = -b\,\vec{v}$$

Então, a força total sobre o objeto será a soma da força de restituição com a força de arrastamento:

$$\vec{F} = -k\,\vec{x} - b\,\vec{v} = -k\,\vec{x} - b\frac{d\vec{x}}{dt}$$

M.Mola amortecida

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\vec{x} - \frac{b}{m}\frac{d\vec{x}}{dt}$$

simulação

17.4 Oscilações amortecidas

A resolução desta equação diferencial conduz a uma solução do tipo

$$\frac{k}{m}\vec{x}+\frac{b}{m}\frac{d\vec{x}}{dt}+\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=A_0\exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)\cos\left(\omega' t+\delta\right)$$

com $\omega'=\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)}$ $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

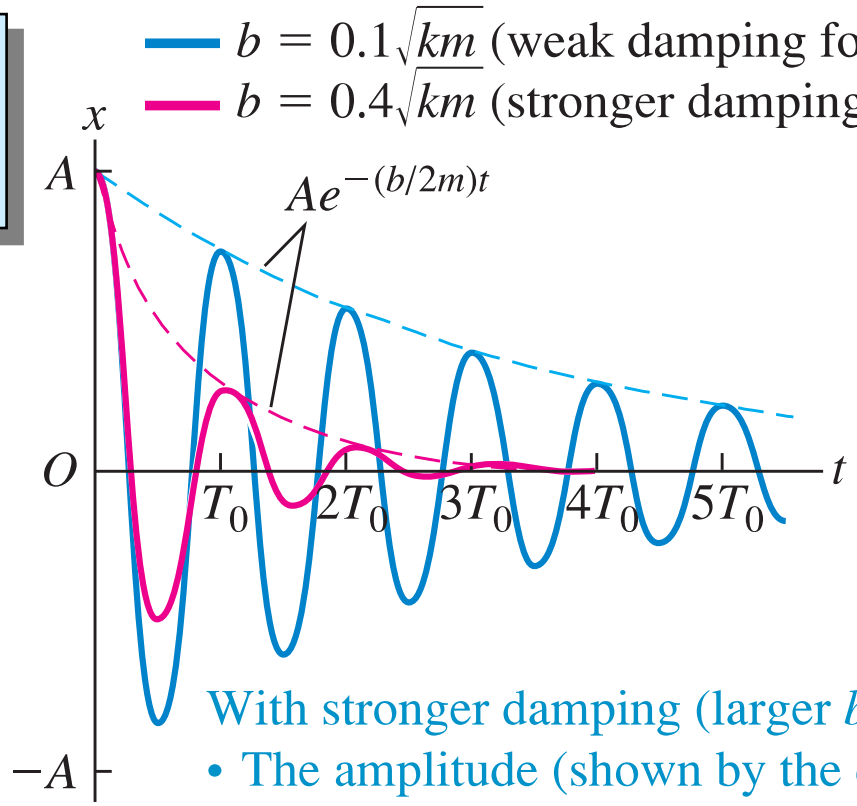
17.4 Oscilações amortecidas

A amplitude das oscilações diminui exponencialmente com o tempo:

$$x = A_0 \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)\cos(\omega' t + \delta)$$

e a energia mecânica (total) também:

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)$$



With stronger damping (larger b):

- The amplitude (shown by the dashed curves) decreases more rapidly.
- The period T increases (T_0 = period with zero damping).

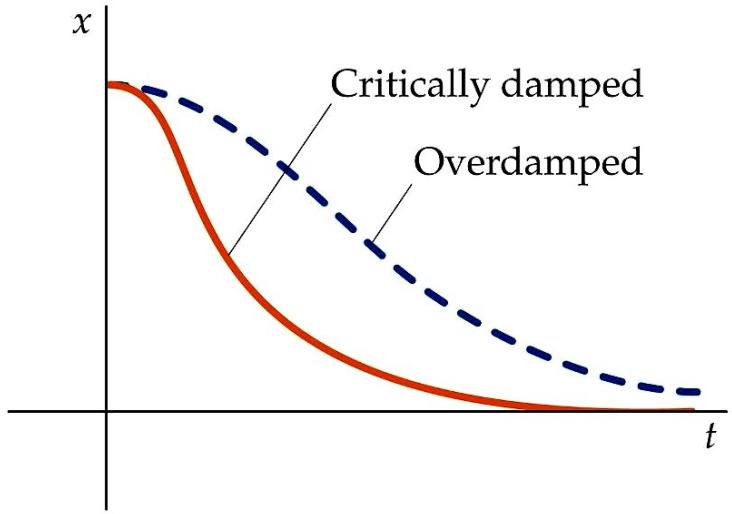
M.Mola amortecida

simulação

17.4 Oscilações amortecidas

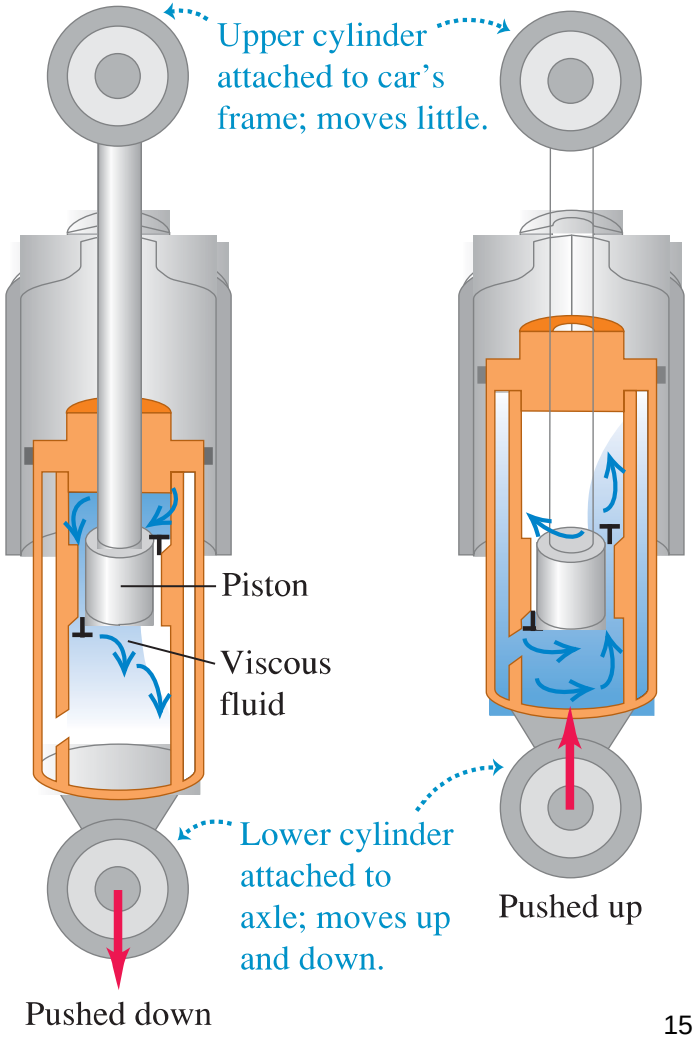
A amplitude das oscilações diminui exponencialmente com o tempo:

$$x = A_0 \exp\left(-\frac{b}{2m}t\right)\cos(\omega' t + \delta)$$



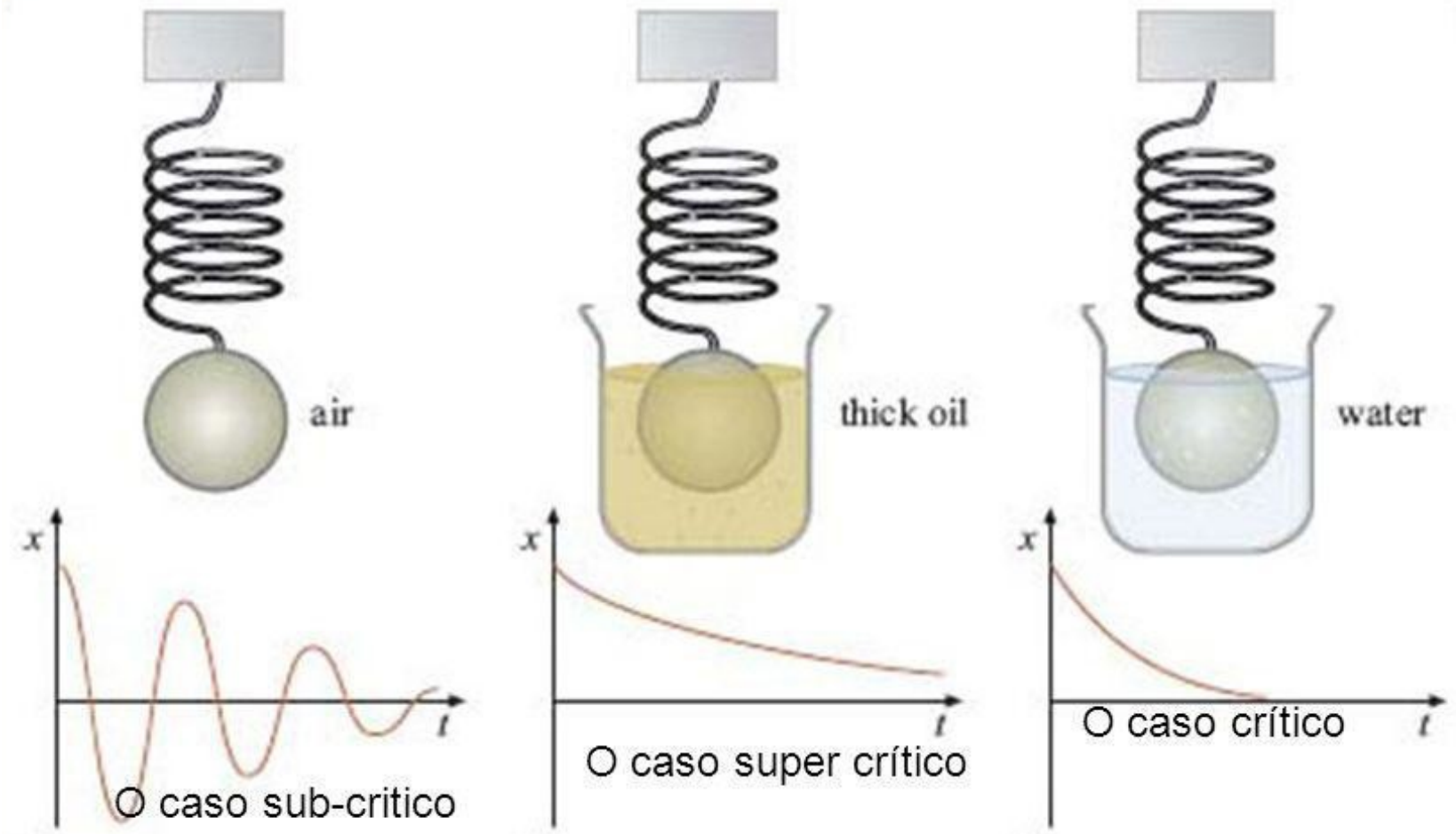
Valor crítico da constante de amortecimento:

$$b_c = 2m\omega_0 = 2\sqrt{km}$$



17.4 Oscilações amortecidas

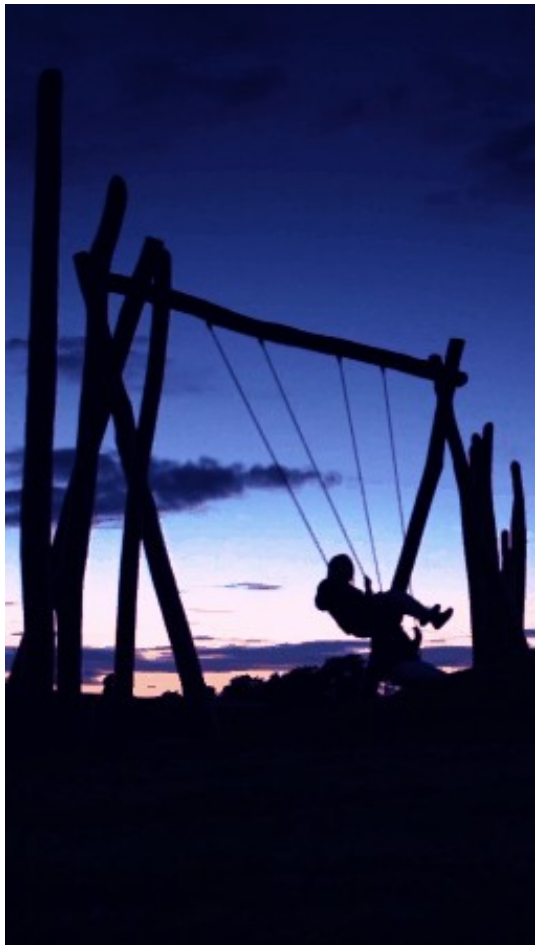
A amplitude das oscilações diminui exponencialmente com o tempo:

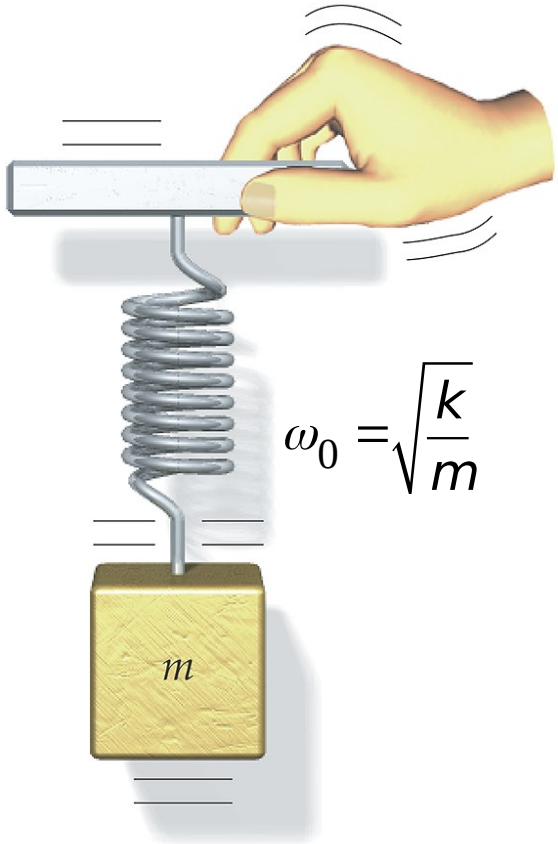


17.5 Oscilações forçadas

Para se manter um sistema amortecido em oscilação, é necessário ***forçar*** *o movimento, imprimindo uma força exterior, no sentido do movimento. Essa força deve oscilar com uma frequência próxima da* ***frequência própria*** *do sistema (ω_0):*

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_0 \cos \omega t$$





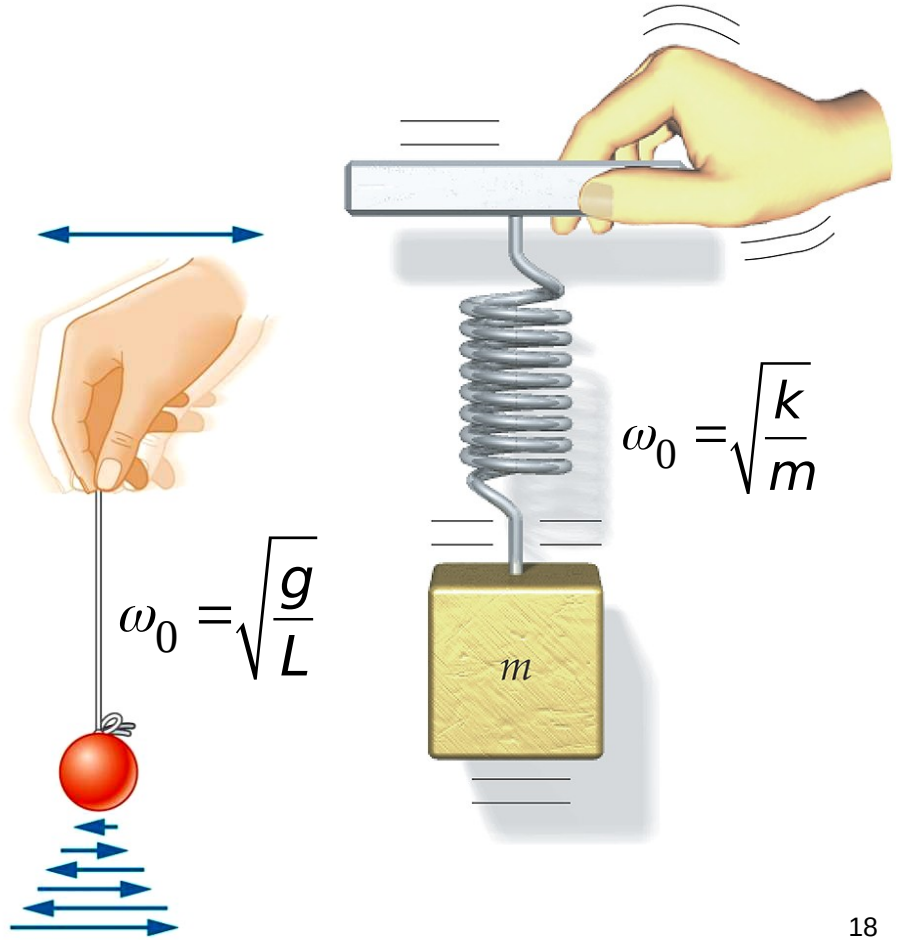
17.5 Oscilações forçadas

Para se manter um sistema amortecido em oscilação, é necessário ***forçar*** *o movimento, imprimindo uma força exterior, no sentido do movimento. Essa força deve oscilar com uma frequência próxima da* ***frequência própria*** *do sistema (ω_0):*

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_0 \cos \omega t$$

Então, a força total sobre o objeto será a soma da força de restituição com a força de arrastamento, com a força que obriga a que o movimento se mantenha:

$$\vec{F} = -k\,\vec{x} - b\frac{d\vec{x}}{dt} + F_0 \cos \omega t$$



17.5 Oscilações forçadas

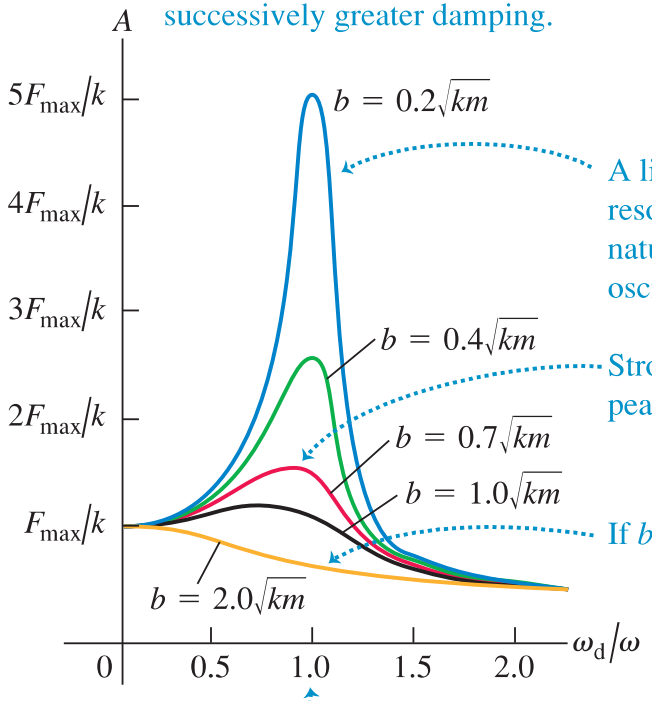
Equação diferencial do movimento:

$$k\vec{x} + b\frac{d\vec{x}}{dt} + m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = F_0 \cos \omega t$$

Amplitude das oscilações:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$$

Each curve shows the amplitude A for an oscillator subjected to a driving force at various angular frequencies ω_d. Successive curves from blue to gold represent successively greater damping.



A lightly damped oscillator exhibits a sharp resonance peak when ω_d is close to ω (the natural angular frequency of an undamped oscillator).

Stronger damping reduces and broadens the peak and shifts it to lower frequencies.

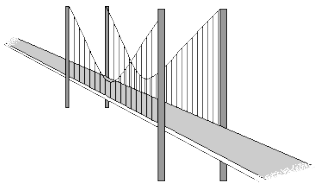
If $b \geq \sqrt{2km}$, the peak disappears completely.

Driving frequency ω_d equals natural angular frequency ω of an undamped oscillator.

17.5 Oscilações forçadas

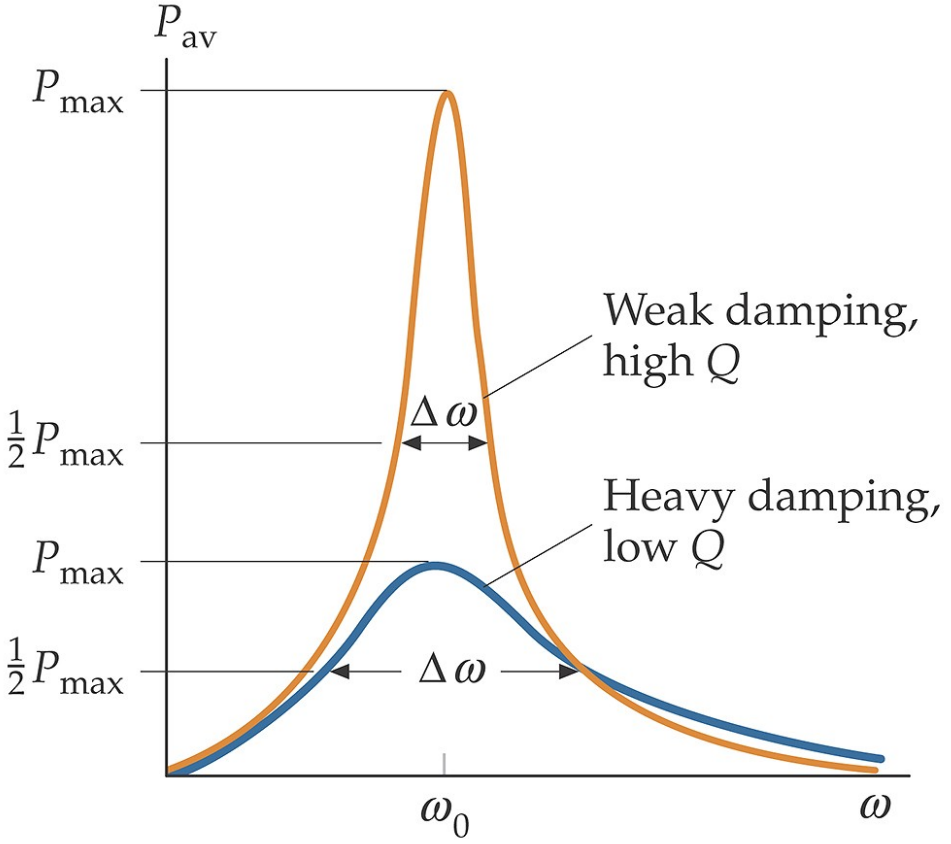
*Na **ressonância**, a frequência de oscilação é igual (ou muito próxima) da frequência própria do sistema:* $\omega = \omega_0$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$$



Tacoma Bridge

filme



In November, 1940, the newly completed Tacoma Narrows Bridge, opened barely four months before, swayed and collapsed in a 42 mile-per-hour wind.