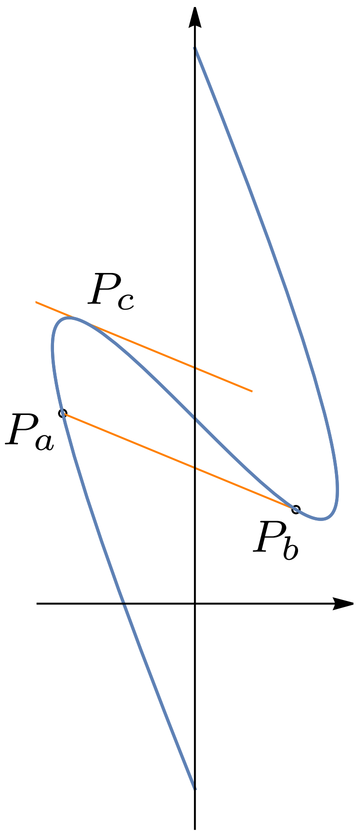
O Teorema de Cauchy

Um par de funções $\big(g(t), f(t)\big)$ descreve um caminho em $\mathbb{R}^2$.



- $P_a = \big(g(a), f(a)\big)$, $P_b = \big(g(b), f(b)\big)$
- $\big(g'(c), f'(c)\big)$ é um vector tangente em P_c

Teorema (de Cauchy)

- Se f e g são diferenciáveis em $]a, b[$,
- f e g são contínuas em a e em b, e
- $g'(x) \neq 0$ para qualquer $x \in]a, b[$,

então existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Demonstração do Teorema de Cauchy

- Definimos $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$
- $K\big(g(b) - g(a)\big) = f(b) - f(a)$
- $Kg(b) - f(b) = Kg(a) - f(a)$.
- $Kg(x) - f(x)$ está nas condições do T. Rolle:
- Existe $c \in \,]a, b[$ tal que $Kg'(c) - f'(c) = 0$.
- $Kg'(c) = f'(c)$
- $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Nota: como $g'(x) \neq 0$ em $]a, b[$, pelo T. Rolle $g(b) \neq g(a)$.

A Regra de Cauchy para Limites à Direita

Sejam f, g diferenciáveis em $]a, c[$ $(a, c \in \overline{\mathbb{R}},\ a < c)$. Se:

- No cálculo do $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ obtivermos $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \quad (b \in \overline{\mathbb{R}})$,

então $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

Demonstração da Regra de Cauchy: Caso 0/0

Assumimos primeiro que $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$
- $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \neq a; \\ 0, & \text{se } x = a, \end{cases} \qquad \bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se } x \neq a; \\ 0, & \text{se } x = a. \end{cases}$
- T. Cauchy: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\bar{f}(x) - \bar{f}(a)}{\bar{g}(x) - \bar{g}(a)} = \dfrac{\bar{f}'(c_x)}{\bar{g}'(c_x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$

  com $c_x \in]a, x[$. $y = c_x$: Se $x \to a$ então $c_x \to a$.
- $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{y \to a^+} \dfrac{f'(y)}{g'(y)}$

Se $a = -\infty$ fazemos a substituição $x = -1/y, \quad y = -1/x$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f(-1/y)}{g(-1/y)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\frac{1}{y^2} f'(-1/y)}{\frac{1}{y^2} g'(-1/y)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demonstração da Regra de Cauchy: Caso ∞/∞

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
- A provar: $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$
- Dado $\varepsilon > 0$ queremos $b - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < b + \varepsilon$ numa viz. $V_\delta(a)$.
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$ logo $b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$ numa viz. $V_\delta(a)$.
- $x, y \in V_\delta(a) : b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$

Multiplicando por $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} = 1 - \frac{g(y)}{g(x)}$:

$$(1 - \tfrac{g(y)}{g(x)})(b - \tfrac{\varepsilon}{2}) < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} < (b + \tfrac{\varepsilon}{2})(1 - \tfrac{g(y)}{g(x)})$$

Demonstração da Regra de Cauchy: Caso ∞/∞

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
- A provar: $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$
- Dado $\varepsilon > 0$ queremos $b - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < b + \varepsilon$ numa viz. $V_\delta(a)$.
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$ logo $b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$ numa viz. $V_\delta(a)$.
- $x, y \in V_\delta(a) : b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\lim_{x\to a} \left((1 - \frac{g(y)}{g(x)})(b - \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{f(y)}{g(x)} \right) = b - \frac{\varepsilon}{2} > b - \varepsilon$$

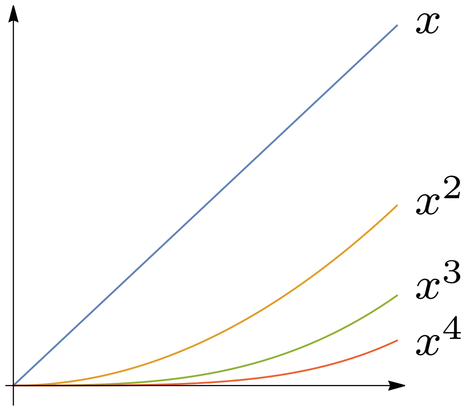
$$\color{red}{(1-\frac{g(y)}{g(x)})(b-\frac{\varepsilon}{2})+\frac{f(y)}{g(x)}} < \frac{f(x)}{g(x)} < (b+\frac{\varepsilon}{2})(1-\frac{g(y)}{g(x)})+\frac{f(y)}{g(x)}$$

Demonstração da Regra de Cauchy: Caso ∞/∞

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
- A provar: $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$
- Dado $\varepsilon > 0$ queremos $b - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < b + \varepsilon$ numa viz. $V_\delta(a)$.
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$ logo $b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$ numa viz. $V_\delta(a)$.
- $x, y \in V_\delta(a) : b - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} < b + \frac{\varepsilon}{2}$

$$b-\varepsilon < \left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\left(b-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(b+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)} < b+\varepsilon$$

Infinitésimos de Ordem Superior



Uma função f diz-se um infinitésimo de ordem $> n$ num ponto a se

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0 = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)}{\Delta x^n}$$

$(\Delta x = x - a)$. Escrevemos $f(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$.

Algumas observações:

- $f(x), g(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n) \;\Rightarrow\; f(x) \pm g(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$
- $f(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n) \;\Rightarrow\; c\,f(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$
- $f(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n) \;\Rightarrow\; f(x) = \mathrm{o}(\Delta x^k)$ para $k < n$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\Delta x^k} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\Delta x^n} \Delta x^{n-k} = 0$$

Infinitésimos de Ordem $> n$ e Derivadas

Teorema

Se f é n vezes diferenciável numa vizinhança de a e

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0\,,$$

então f é um infinitésimo de ordem $> n$ em a.

Demonstração. Primeiro observamos que

$$\left(\frac{\Delta x^n}{n!}\right)' = \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!}\,, \qquad \left(\frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!}\right)' = \frac{\Delta x^{n-2}}{(n-2)!}\,, \qquad \cdots$$

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\Delta x^n/n!} \overset{?}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\Delta x^{n-1}/(n-1)!} \overset{?}{=} \ldots \overset{?}{=} \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}$$
$$\overset{?}{=} \lim_{x\to a} f^{(n)}(x) \quad \text{não funciona}$$

Infinitésimos de Ordem $> n$ e Derivadas

Teorema

Se f é n vezes diferenciável numa vizinhança de a e

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0\,,$$

então f é um infinitésimo de ordem $> n$ em a.

Demonstração. Primeiro observamos que

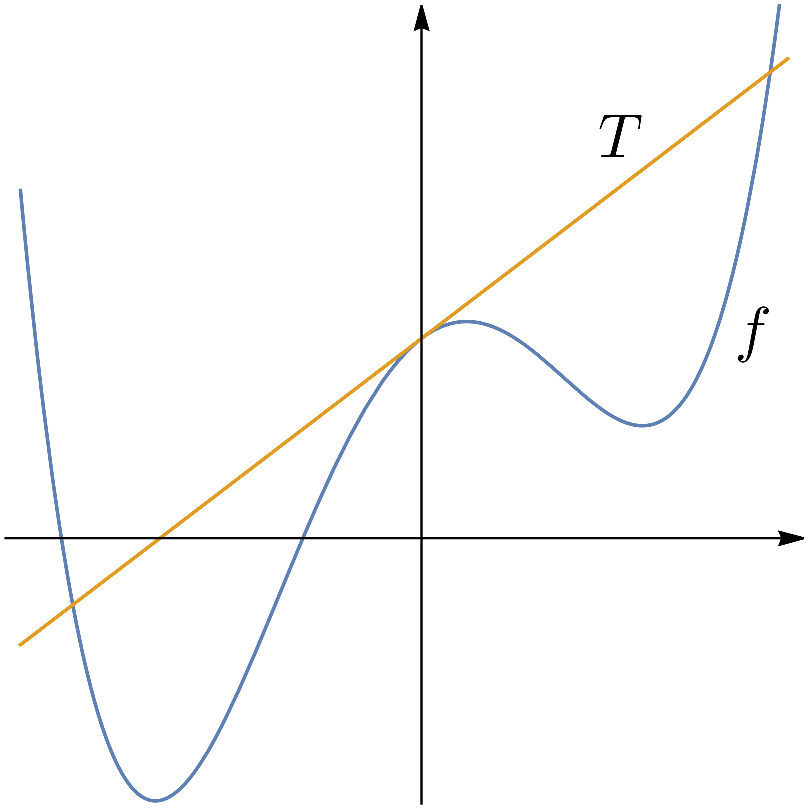
$$\left(\frac{\Delta x^n}{n!}\right)' = \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!}\,, \quad \left(\frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!}\right)' = \frac{\Delta x^{n-2}}{(n-2)!}\,, \quad \cdots$$

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\Delta x^n/n!} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\Delta x^{n-1}/(n-1)!} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a) = 0$$

Aproximação de Funções por Polinómios

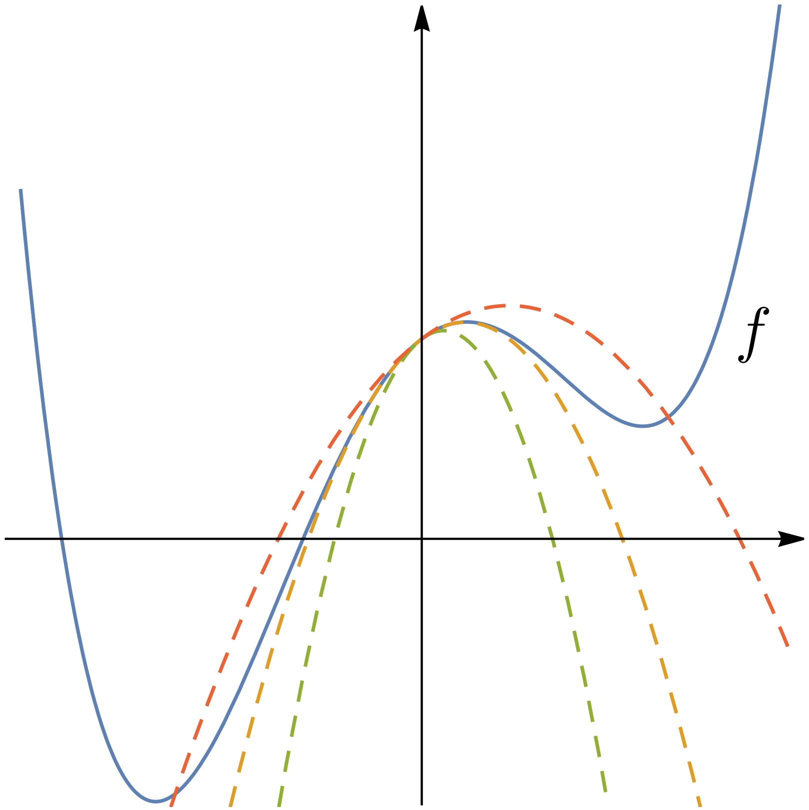


A recta tangente em a é o gráfico do polinómio $T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

- $T(a) = f(a)$
- $T'(a) = f'(a)$

$$f(x) - T(x) = \mathrm{o}(\Delta x)$$

Aproximação de Funções por Polinómios

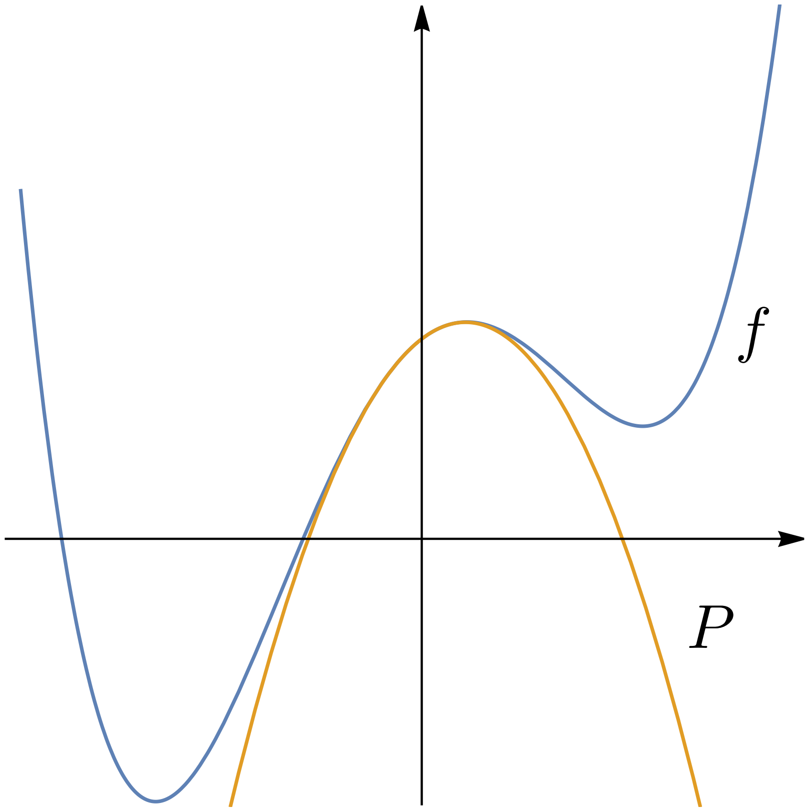


Qual a parábola $P(x)$ que melhor aproxima f para x próximo de a?

- $P(a) = f(a)$
- $P'(a) = f'(a)$

$$f(x) - P(x) = \mathrm{o}(\Delta x)$$

Aproximação de Funções por Polinómios



Qual a parábola $P(x)$ que melhor aproxima f para x próximo de a?

- $P(a) = f(a)$
- $P'(a) = f'(a)$
- $P''(a) = f''(a)$

$f(x) - P(x) = \mathrm{o}(\Delta x^2)$

Aproximação de Funções por Polinómios: Caso $a = 0$

Queremos encontrar um polinómio $T(x)$ tal que:
$T(0) = f(0), \quad T'(0) = f'(0), \quad \dots \quad T^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$

$$
\begin{aligned}
T(x) &= f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \\
T'(x) &= 0 \quad + f'(0) \quad + f''(0)\,x \quad + f'''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
T''(x) &= 0 \quad + 0 \quad + f''(0) \quad + f'''(0)\,x + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\
T'''(x) &= 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad + f'''(0) + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^{n-3}}{(n-3)!} \\
&\vdots \\
T^{(n)}(x) &= 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad + \cdots + f^{(n)}(0)
\end{aligned}
$$

Polinómios de Taylor

Definição (Polinómio de Taylor)

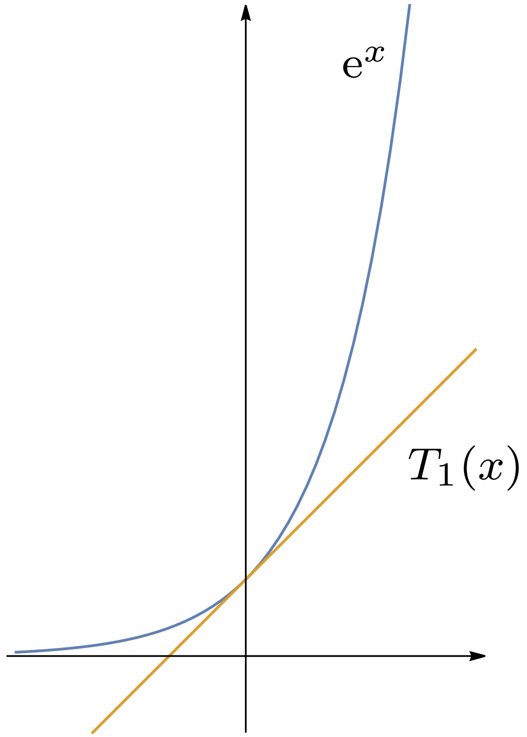
Seja f uma função n vezes diferenciável em $a \in D_f$. Chamamos polinómio de Taylor de ordem n de f em a ao polinómio

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

- $T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$
- $f(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$

Polinómio de Taylor da Exponencial na Origem

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$



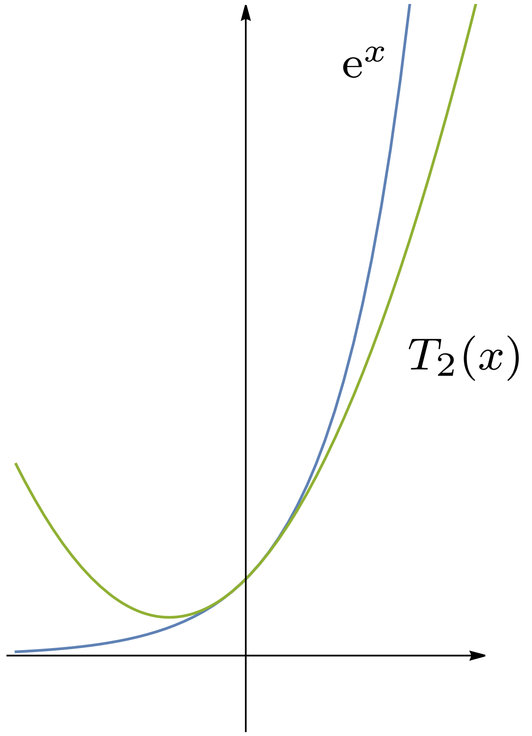
Para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, temos

- $f^{(k)}(x) = e^x$
- $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,. \end{aligned}$$

Polinómio de Taylor da Exponencial na Origem

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$



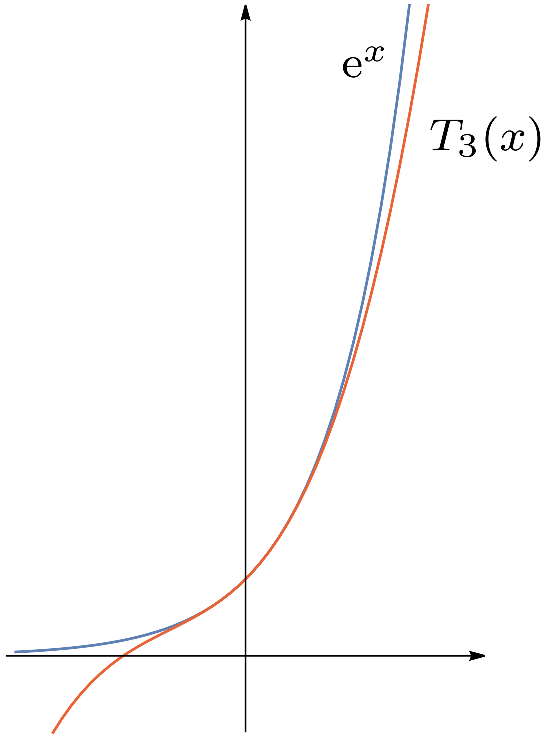
Para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, temos

- $f^{(k)}(x) = e^x$
- $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \,. \end{aligned}$$

Polinómio de Taylor da Exponencial na Origem

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$



Para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$, temos

- $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$
- $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,. \end{aligned}$$