Polinómios de Taylor

Definição (Polinómio de Taylor)

Seja f uma função n vezes diferenciável em $a \in D_f$. Chamamos polinómio de Taylor de ordem n de f em a ao polinómio

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}$$

$$+ f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

- $T_n(a) = f(a), \quad T_n'(a) = f'(a), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$
- $f(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$

Exemplo

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad n = 3, \quad a = \tfrac{\pi}{6}.$$

$$T_3(x) = f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + f'\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) + f''\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} + f'''\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{3!}$$

- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,
- $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$
- $f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$T_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3}{3!}$$

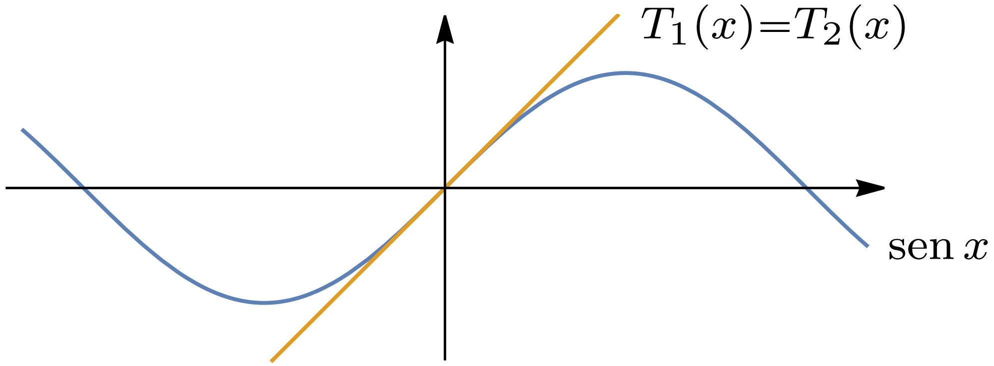
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)^3$$

Polinómio de Taylor do Seno na Origem

$$f = \operatorname{sen} x, \quad f' = \cos x, \quad f'' = -\operatorname{sen} x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^{(4)} = \operatorname{sen} x$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$T_n(x) = 0 + 1x + 0\frac{x^2}{2!} + (-1)\frac{x^3}{3!} + 0\frac{x^4}{4!} + 1\frac{x^5}{5!} + 0\frac{x^6}{6!} + \cdots$$



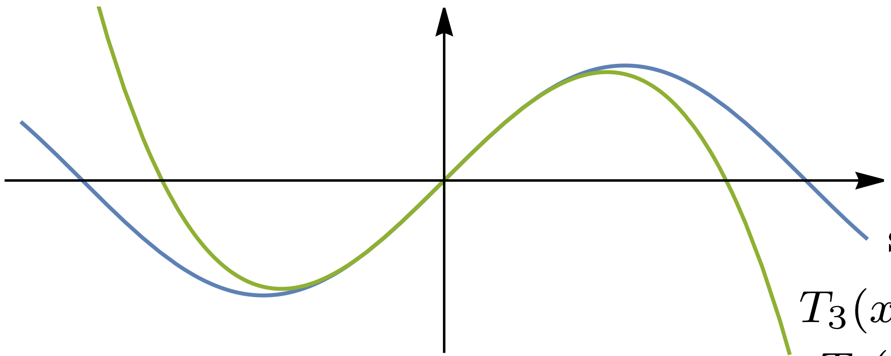
$$T_1(x) = T_2(x) = x$$

Polinómio de Taylor do Seno na Origem

$$f = \operatorname{sen} x, \quad f' = \cos x, \quad f'' = -\operatorname{sen} x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^{(4)} = \operatorname{sen} x$$

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$T_n(x) = 0 + 1x + 0\frac{x^2}{2!} + (-1)\frac{x^3}{3!} + 0\frac{x^4}{4!} + 1\frac{x^5}{5!} + 0\frac{x^6}{6!} + \cdots$$



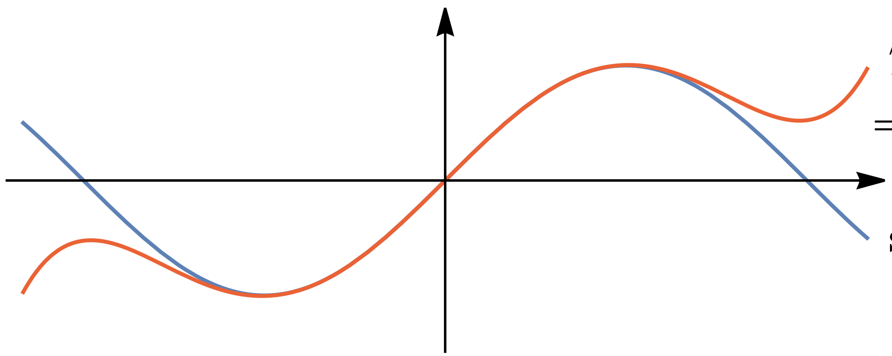
$$T_1(x) = T_2(x) = x$$

$$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Polinómio de Taylor do Seno na Origem

$$f = \operatorname{sen} x, \quad f' = \cos x, \quad f'' = -\operatorname{sen} x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^{(4)} = \operatorname{sen} x$$
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$T_n(x) = 0 + 1x + 0\frac{x^2}{2!} + (-1)\frac{x^3}{3!} + 0\frac{x^4}{4!} + 1\frac{x^5}{5!} + 0\frac{x^6}{6!} + \cdots$$



$$T_1(x) = T_2(x) = x$$
$$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$
$$T_5 = T_6 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

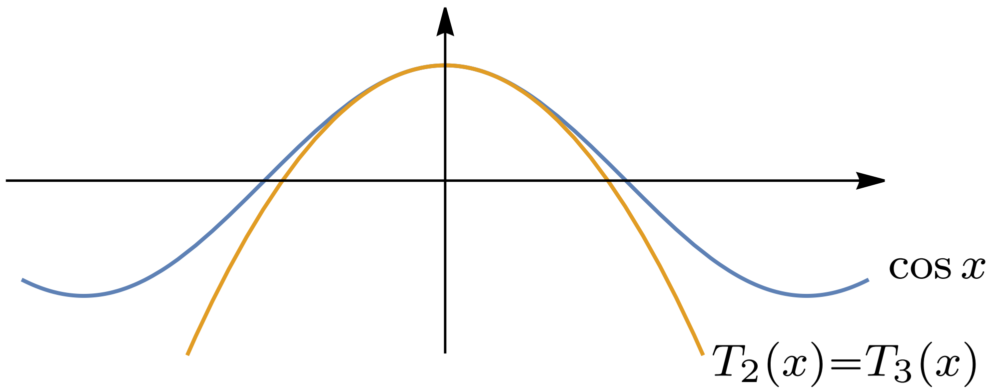
e em geral $\quad T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Polinómio de Taylor do Coseno na Origem

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad \ldots$$

$$T_n(x) = 1 + 0x + (-1)\frac{x^2}{2!} + 0\frac{x^3}{3!} + 1\frac{x^4}{4!} + 0\frac{x^5}{5!} + (-1)\frac{x^6}{6!} + \cdots$$

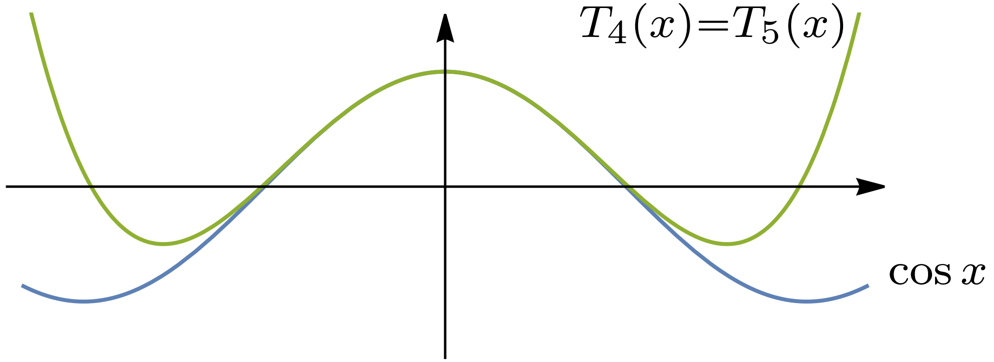


$$T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Polinómio de Taylor do Coseno na Origem

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad \ldots$$

$$T_n(x) = 1 + 0x + (-1)\frac{x^2}{2!} + 0\frac{x^3}{3!} + 1\frac{x^4}{4!} + 0\frac{x^5}{5!} + (-1)\frac{x^6}{6!} + \cdots$$



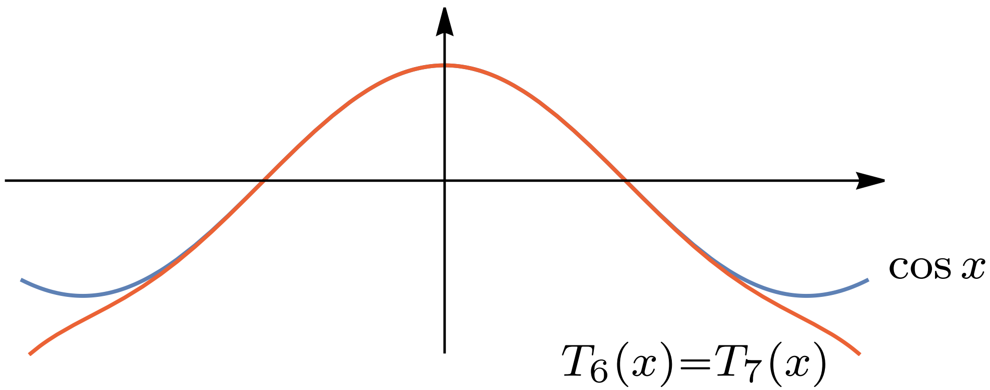
$$T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

Polinómio de Taylor do Coseno na Origem

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad \ldots$$

$$T_n(x) = 1 + 0x + (-1)\frac{x^2}{2!} + 0\frac{x^3}{3!} + 1\frac{x^4}{4!} + 0\frac{x^5}{5!} + (-1)\frac{x^6}{6!} + \cdots$$



$$T_2(x) = T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$T_4(x) = T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

e em geral $\quad T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Unicidade do Polinómio de Taylor

Teorema

$T_n(x)$ é o único polinómio de grau $\leqslant n$ tal que

$$f(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$$

Demonstração. Seja $P(x)$ um polinómio de grau $\leqslant n$ tal que $f(x) - P(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$. Então:

$\big(f(x) - T_n(x)\big) - \big(f(x) - P(x)\big) = P(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$.

Escrevendo

$$P(x) - T_n(x) = c_n(x-a)^n + \cdots + c_2(x-a)^2 + c_1(x-a) + c_0$$

temos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{c_n(x-a)^n + \cdots + c_2(x-a)^2 + c_1(x-a) + c_0}{(x-a)^n} = 0 = \frac{c_0}{0^+}$$

Unicidade do Polinómio de Taylor

Teorema

$T_n(x)$ é o único polinómio de grau $\leqslant n$ tal que

$$f(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$$

Demonstração. Seja $P(x)$ um polinómio de grau $\leqslant n$ tal que $f(x) - P(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$. Então:

$$\big(f(x) - T_n(x)\big) - \big(f(x) - P(x)\big) = P(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n).$$

Escrevendo

$$P(x) - T_n(x) = c_n(x-a)^n + \cdots + c_2(x-a)^2 + c_1(x-a) + c_0$$

temos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{c_n(x-a)^n + \cdots + c_2(x-a)^2 + c_1(x-a)}{(x-a)^n} = 0$$

Unicidade do Polinómio de Taylor

Teorema

$T_n(x)$ é o único polinómio de grau $\leqslant n$ tal que

$$f(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$$

Demonstração. Seja $P(x)$ um polinómio de grau $\leqslant n$ tal que $f(x) - P(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$. Então:

$$\big(f(x) - T_n(x)\big) - \big(f(x) - P(x)\big) = P(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n).$$

Escrevendo

$$P(x) - T_n(x) = c_n(x-a)^n + \cdots + c_2(x-a)^2 + c_1(x-a) + c_0$$

temos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{c_n(x-a)^{n-1} + \cdots + c_2(x-a) + c_1}{(x-a)^{n-1}} = 0 = \frac{c_1}{0^+}$$

Unicidade do Polinómio de Taylor

Teorema

$T_n(x)$ é o único polinómio de grau $\leqslant n$ tal que

$$f(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$$

Demonstração. Seja $P(x)$ um polinómio de grau $\leqslant n$ tal que $f(x) - P(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n)$. Então:

$\big(f(x) - T_n(x)\big) - \big(f(x) - P(x)\big) = P(x) - T_n(x) = \mathrm{o}(\Delta x^n).$

Escrevendo

$$P(x) - T_n(x) = c_n(x-a)^n + \cdots + c_2(x-a)^2 + c_1(x-a) + c_0$$

temos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{c_n(x-a)^{n-1} + \cdots + c_2(x-a)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

portanto $P(x) - T_n(x) = 0$

Estimativa do Erro da Aproximação $f(x) \approx T_n(x)$

Teorema (Fórmula do Resto de Lagrange)

- Seja $f(x)$ uma função $(n+1)$-vezes diferenciável num intervalo $I \subset D_f$;
- Seja $T_n(x)$ o polinómio de Taylor de ordem n de $f(x)$ num ponto $a \in I$.

Então, para qualquer $x \in I$, existe um c_x entre a e x tal que:

$$f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(c_x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} .$$

Demonstração da Fórmula de Lagrange

Dadas funções $F(x)$, $G(x)$ tais que

- $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$ e
- $G(a) = G'(a) = G''(a) = \cdots = G^{(n)}(a) = 0$

pelo T. Cauchy, existem x_1, x_2 entre a e x tais que:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1) - F'(a)}{G'(x_1) - G'(a)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)}$$

Demonstração da Fórmula de Lagrange

Dadas funções $F(x)$, $G(x)$ tais que

- $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$ e
- $G(a) = G'(a) = G''(a) = \cdots = G^{(n)}(a) = 0$

pelo T. Cauchy, existem $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ entre a e x tais que:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)} = \cdots = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{G^{(n+1)}(x_{n+1})}$$

Demonstração da Fórmula de Lagrange

Dadas funções $F(x)$, $G(x)$ tais que

- $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$ e
- $G(a) = G'(a) = G''(a) = \cdots = G^{(n)}(a) = 0$

pelo T. Cauchy, existem $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ entre a e x tais que:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)} = \cdots = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{G^{(n+1)}(x_{n+1})}$$

Tomando

- $F(x) = f(x) - T_n(x), \quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$
- $G(x) = (x-a)^{n+1}/(n+1)!, \quad G^{(n+1)}(x) = 1$

e $c_x = x_{n+1}$ obtemos

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^{n+1}/(n+1)!} = f^{(n+1)}(c_x)$$

Demonstração da Fórmula de Lagrange

Dadas funções $F(x)$, $G(x)$ tais que

- $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$ e
- $G(a) = G'(a) = G''(a) = \cdots = G^{(n)}(a) = 0$

pelo T. Cauchy, existem $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ entre a e x tais que:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)} = \cdots = \frac{F^{(n+1)}(x_{n+1})}{G^{(n+1)}(x_{n+1})}$$

Tomando

- $F(x) = f(x) - T_n(x), \quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$
- $G(x) = (x-a)^{n+1}/(n+1)!, \quad G^{(n+1)}(x) = 1$

e $c_x = x_{n+1}$ obtemos

$$f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(c_x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

O Limite $\lim\limits_{x \to a} f^{(n+1)}(c_x)$

- Fórmula de Lagrange:

$$f(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(c_x) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$T_{n+1}(x) - T_n(x) = f^{(n+1)}(a) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Subtraindo:
$$f(x) - T_{n+1}(x) = \left(f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(a) \right) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$
- $\dfrac{f(x) - T_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} (n+1)! = f^{(n+1)}(c_x) - f^{(n+1)}(a)$
- Mas sabemos que $f(x) - T_{n+1}(x) = \mathrm{o}(\Delta x^{n+1})$ logo

Fórmula de Peano: $\lim\limits_{x \to a} f^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(a)$

Exemplo: o Número de Neper

Fórmula de Lagrange para $f(x) = \mathrm{e}^x$:

$$\mathrm{e}^x = T_4(x) + f^{(5)}(c)\frac{x^5}{5!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{e}^c\,\frac{x^5}{5!}$$

Tomando $x = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-1} &= 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \mathrm{e}^c\,\frac{(-1)^5}{5!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{\mathrm{e}^c}{120} = \frac{3}{8} - \frac{\mathrm{e}^c}{120} \quad (-1 < c < 0) \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{-1} < \mathrm{e}^c < \mathrm{e}^0 = 1$ logo $-1 < -\mathrm{e}^c < -e^{-1} < 0$:

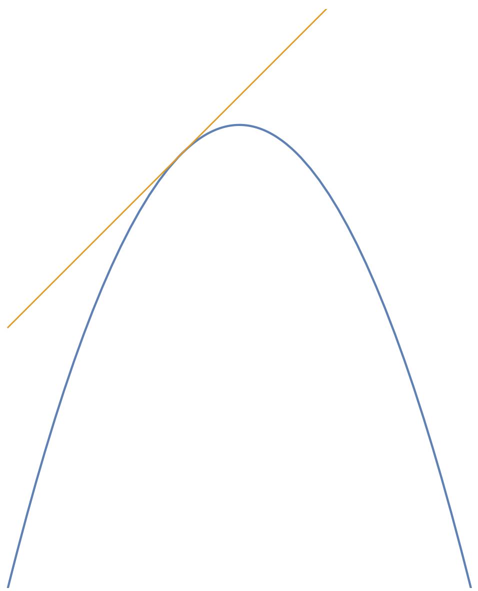
$$\frac{11}{30} = \frac{3}{8} - \frac{1}{120} < \mathrm{e}^{-1} < \frac{3}{8} - \frac{0}{120}$$

Invertendo, obtemos também uma estimativa para o valor de e:

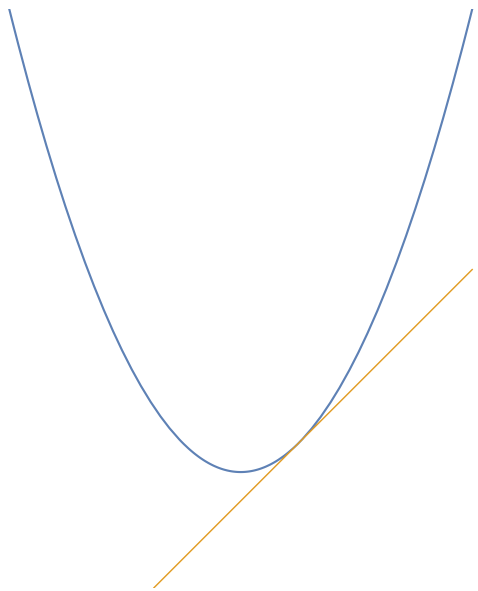
$$\frac{8}{3} < \mathrm{e} < \frac{30}{11} \quad \text{ou seja} \quad 2{,}666\ldots < \mathrm{e} < 2{,}727\ldots$$

Posição do Gráfico em Relação à Recta Tangente

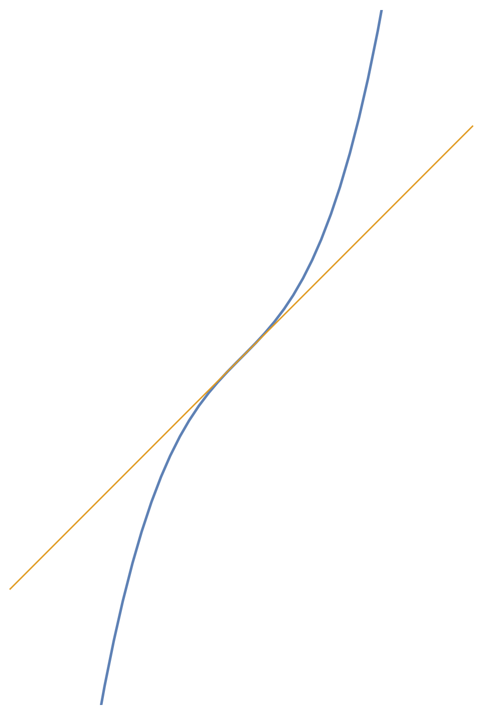
Concavidade voltada para baixo:



Concavidade voltada para cima:



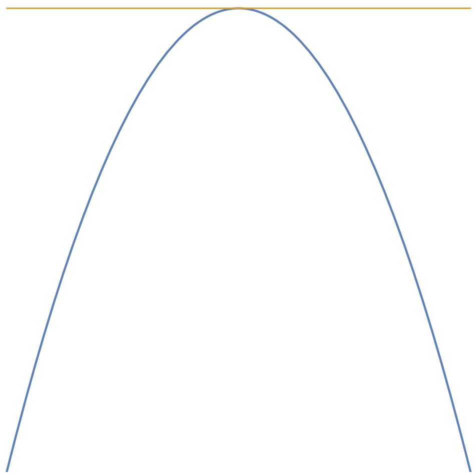
Ponto de inflexão:



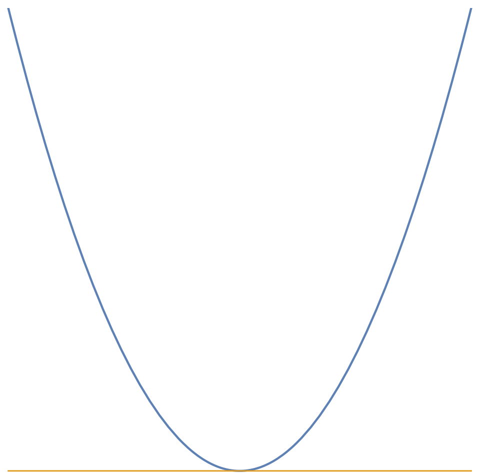
Pontos Críticos

Dizemos que a é um ponto crítico de f se $f'(a) = 0$.

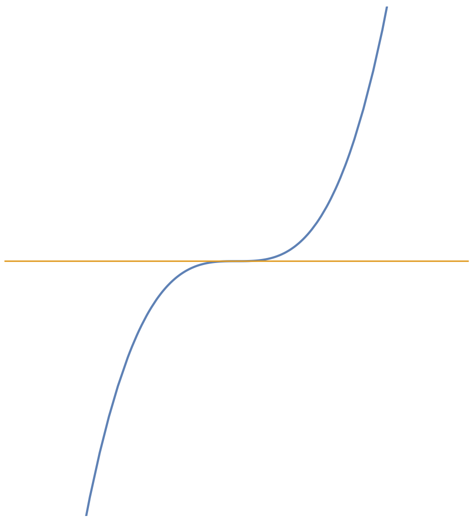
Máximo local:



Mínimo local:



Ponto de inflexão:



Classificação de pontos críticos

Teorema

Seja f uma função n-vezes diferenciável numa vizinhança dum ponto $a \in D_f$, tal que

$$f'(a) = f''(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0\,.$$

1. Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então a é um mínimo local de f.
2. Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então a é um máximo local de f.
3. Se n é ímpar e $f^{(n)}(a) \neq 0$, então a é um ponto de inflexão.