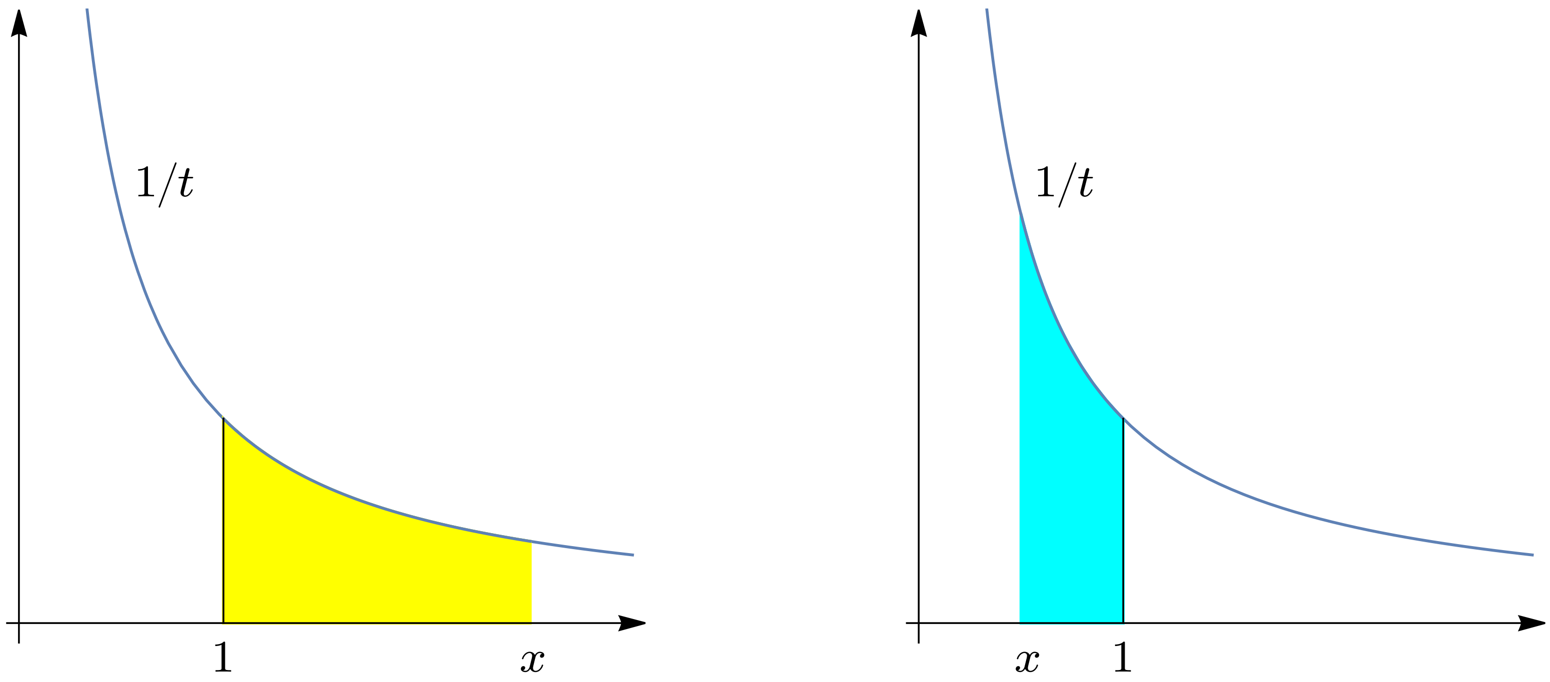
Aula de Hoje: Logaritmo e Exponencial

Logaritmo Natural

Chamamos logaritmo natural à função: $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

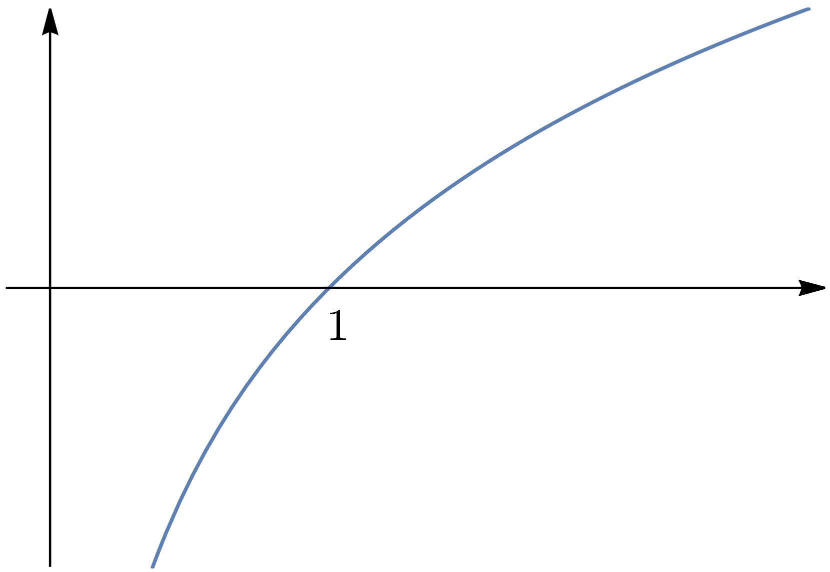


- O domínio do logaritmo é $D =]0, +\infty[$
- $\ln(1) = 0$, $\ln x > 0$ para $x > 1$ e $\ln x < 0$ para $0 < x < 1$.

Monotonia e Concanvidade

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

- Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:
  $(\ln x)' = 1/x, \quad \text{logo} \quad (\ln x)'' = -1/x^2;$
- O logaritmo é estritamente crescente e côncavo.



Propriedades do Logaritmo

Teorema. Para quaisquer $a, b > 0$,

1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b\,.$
2. $\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a\,.$
3. $\ln(a^n) = n \ln a \quad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$

Desmonstração.

1. Fazendo a substituição $s = at$, $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}t$, obtemos

$$\ln b = \int_1^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_a^{ab} \frac{1}{s/a}\,\frac{1}{a}\,\mathrm{d}s = \int_a^{ab} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$$

$$\ln a + \ln b = \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(ab)$$

2. $\ln b = \ln\left(\frac{b}{a} \cdot a\right) = \ln \frac{b}{a} + \ln a \quad$ logo $\quad \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}\,.$
3. $\ln(a^n) = \ln(a \cdot a \cdots a) = \ln a + \ln a + \cdots + \ln a = n \ln a$

Limites e Contradomínio do Logaritmo

Começamos por ver que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- Dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar um $\delta > 0$ tal que
$$x > 1/\delta \;\Rightarrow\; \ln x > 1/\varepsilon$$
- Escolhemos n tal que $n \ln 2 = \ln(2^n) > 1/\varepsilon \quad \left(n > \frac{1}{\varepsilon \ln 2}\right)$
- Se $1/\delta = 2^n$, como ln é crescente:
$x > 1/\delta \;\Leftrightarrow\; x > 2^n \;\Rightarrow\; \ln x > \ln(2^n) > 1/\varepsilon$

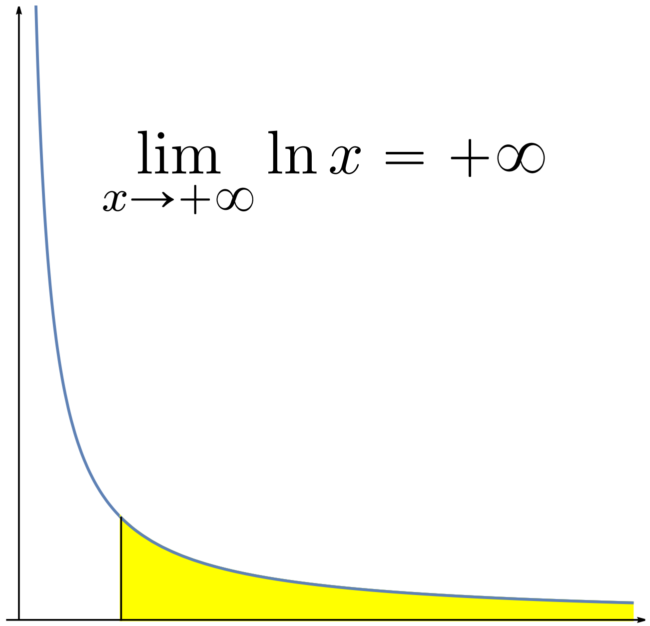
Para calcular o limite em 0^+ substituimos $y = 1/x$:

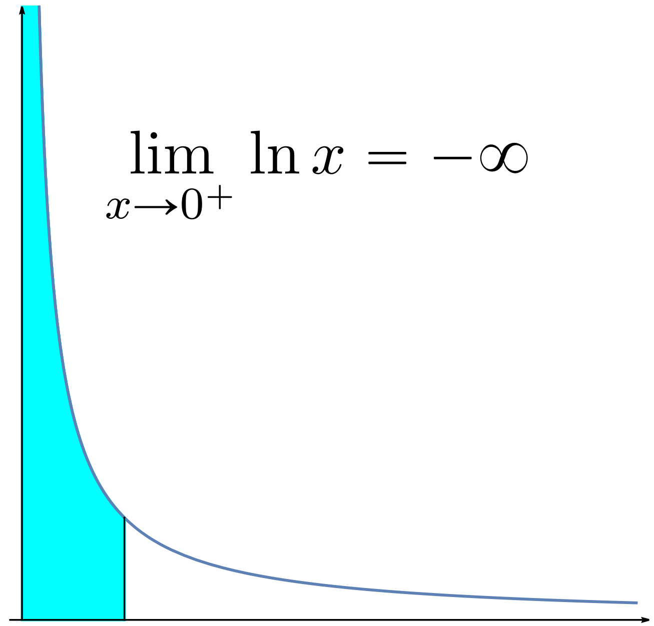
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{y \to +\infty} \ln \frac{1}{y} = -\lim_{y \to +\infty} \ln y = -\infty$$

Teorema de Bolzano: $D'_{\ln} = \mathbb{R}$.

Limites: Interpretação Geométrica

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

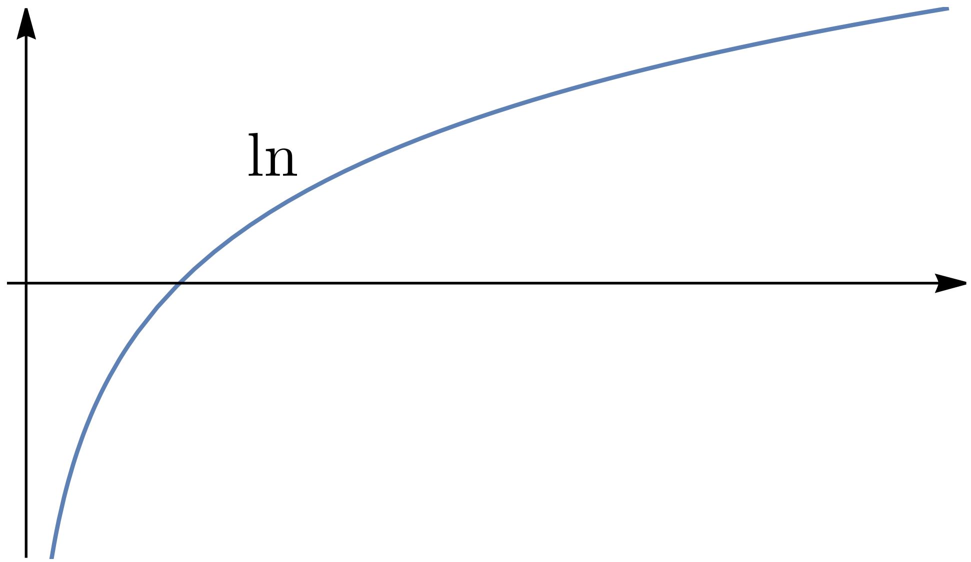


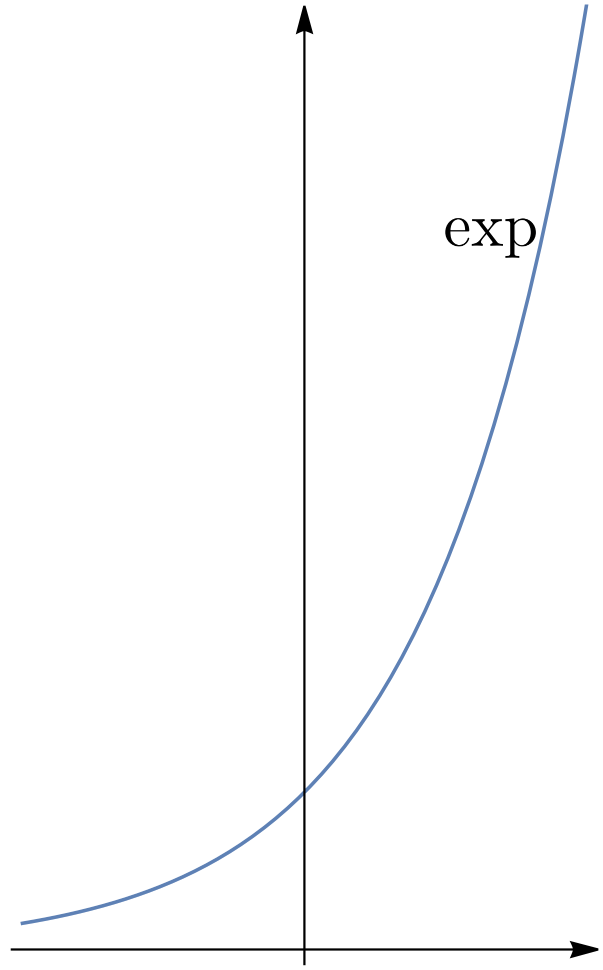


Exponencial

Chamamos exponencial à função inversa do logaritmo:

- $y = \exp x \ \Leftrightarrow\ x = \ln y$
- $D_{\exp} = D'_{\ln} = \mathbb{R}$
- $D'_{\exp} = D_{\ln} =]0, +\infty[$





Exponencial (Continuação)

Derivada:

- $y = \exp x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$
- $(\exp x)' = \dfrac{1}{(\ln y)'} = \dfrac{1}{1/y} = y = \exp x$

$\exp(x + y) = \exp(x)\ \exp(y)$:

- Escrevemos $u = \exp x$ e $v = \exp y$;
- Então $x = \ln u$ e $y = \ln v$:

$$
\begin{aligned}
\exp(x + y) &= \exp(\ln u + \ln v) \\
&= \exp\big(\ln(uv)\big) \\
&= uv \\
&= \exp(x)\ \exp(y)
\end{aligned}
$$

Exemplos de Primitivas

- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^x) + C$
- $\displaystyle\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + C$
- $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$

Primitiva de $1/x$

Para $x > 0$: $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$

Teorema. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

Demonstração. Para $x < 0$:

$$(\ln|x|)' = \big(\ln(-x)\big)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

Exemplos.

- $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C$

Significado de a^b

- Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ definimos $a^b = \exp(b \ln a)$.
- Dadas funções f e g, a função f^g é a função definida por:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x) \ln f(x)\big)$$

com domínio

$$D_{f^g} = \big\{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \cap D_g \quad \text{e} \quad f(x) > 0\big\}$$

- Chamamos exponencial de base $a > 0$ à função

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

- Chamamos número de Neper a $\mathrm{e} = \exp(1)$. Como $\ln(\mathrm{e}) = 1$,

$$\mathrm{e}^x = \exp(x)$$

Exemplos de Derivadas

- Derivada de x^a:

$$(x^a)' = (\mathrm{e}^{a \ln x})' = \mathrm{e}^{a \ln x}\,\frac{a}{x} = x^a\,\frac{a}{x} = a x^{a-1}$$

- Derivada de a^x:

$$(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})' = \mathrm{e}^{x \ln a}\,\ln a = a^x \ln a$$

- Derivada de x^x:

$$(x^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \ln x}\right)' = \mathrm{e}^{x \ln x}\left(x \ln x\right)' = x^x\left(\ln x + x\,\tfrac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

Funções hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ e $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$
- $(\operatorname{senh} x)' > 0$, logo senh é estritamente crescente.
- $\operatorname{senh}(0) = 0$, $\operatorname{senh} x > 0$ para $x > 0$, e $\operatorname{senh} x < 0$ para $x < 0$.

$\operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$ e $\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$ logo:

$$\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 x = 1$$