Aula de Hoje: Integrais Impróprios

Integrais em Intervalos Ilimitados

Dizemos que o integral é impróprio se o intervalo de integração for ilimitado, ou a função integranda for ilimitada.

Dada uma função f tal que $f \in \mathcal{I}_{[a,y]}$ para todo o $y > a$,

- se existir, em $\mathbb{R}$, o limite $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t$, o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diz-se convergente, com valor

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- Caso contrário, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diz-se divergente.

Regra de Barrow

Teorema

Se f é contínua em $[a, +\infty[$ e G é uma primitiva de f, então:

- $\int_a^{+\infty} f$ é convergente se e só se $\lim\limits_{y\to+\infty} G(y) \in \mathbb{R}$, e nesse caso
- $$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\lim_{y\to+\infty} G(y)\right) - G(a) = \Big[G(y)\Big]_a^{+\infty}$$

Demonstração.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to+\infty} \int_a^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to+\infty} \big(G(y) - G(a)\big)$$
$$= \left(\lim_{y\to+\infty} G(y)\right) - G(a)$$

Exemplos de Integrais Impróprios

- $f(x) = 1/\sqrt{x}$ em $[1, +\infty[$.

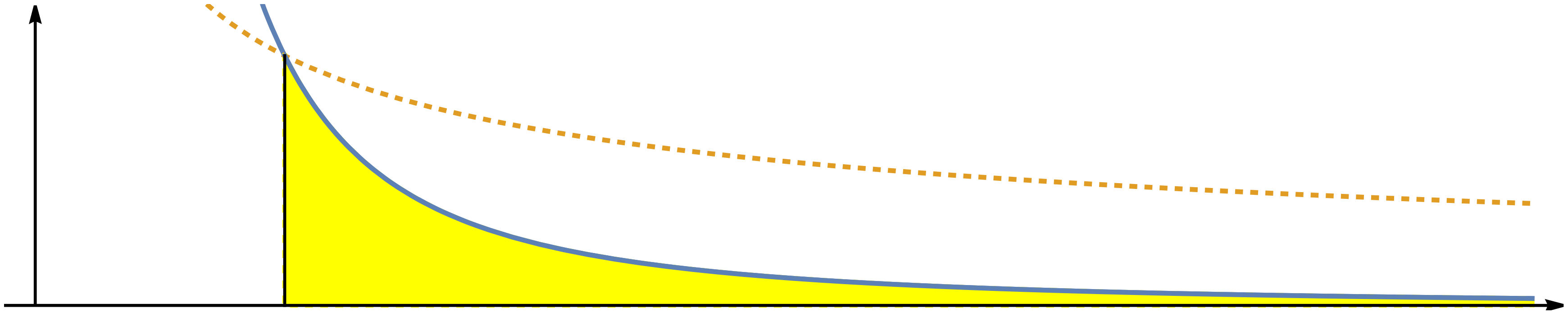
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x} \Big]_1^{+\infty} = +\infty$$

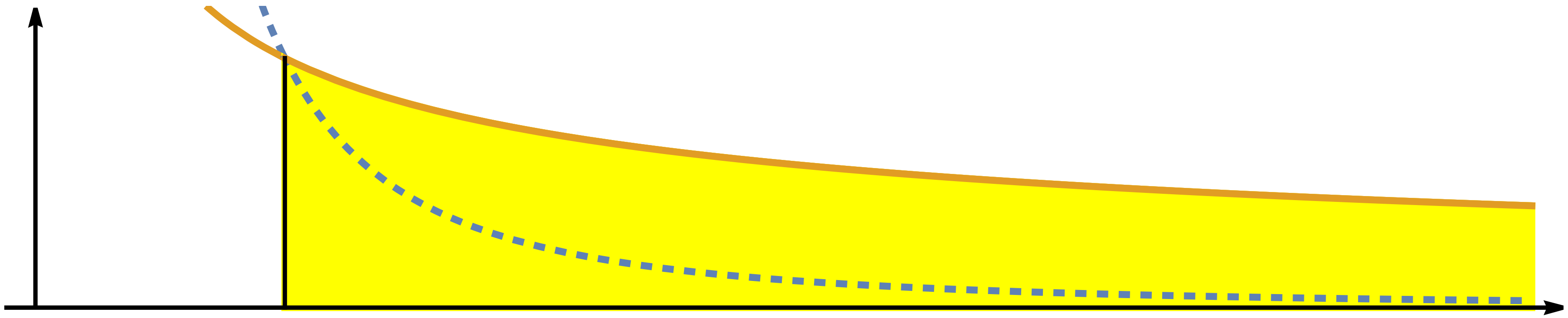
  O integral impróprio é divergente.

- $f(x) = 1/x^2$ em $[1, +\infty[$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x} \Big]_1^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

  O integral impróprio é convergente.





Integrais em $]-\infty, b]$

Dada uma função f tal que $f \in \mathcal{I}_{[x,b]}$ para todo o $x < b$,

- se existir, em $\mathbb{R}$, o limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, o integral impróprio $\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diz-se convergente, com valor

$$\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- Caso contrário, $\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diz-se divergente.

Exemplo

Se f for contínua em $]-\infty, b]$, e G for uma primitiva de f, $\int_{-\infty}^{b} f$ é convergente sse $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) \in \mathbb{R}$ e nesse caso:

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - \lim_{x \to -\infty} G(x) = \Big[G(t)\Big]_{-\infty}^{b}$$

Exemplo.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{t^2+t+1}\Big]_{-\infty}^{0} = -1 - 0 = -1$$

O integral impróprio é convergente.

Integrais impróprios de funções ilimitadas

Dada uma função f ilimitada num intervalo $]a,b]$ e tal que $f \in \mathcal{I}_{[x,b]}$ se $a < x < b$,

- se existir, em $\mathbb{R}$, o limite $\lim\limits_{x \to a^+} \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$, o integral impróprio $\int_{a^+}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diz-se convergente, com valor

$$\int_{a^+}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

- Caso contrário, $\int_{a^+}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diz-se divergente.

Exemplos

Exemplo. $f(x) = 1/x^2$ em $]0,1]$.

$$\int_{0^+}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{0^+}^{1} = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{0^+} \right) = +\infty \,,$$

portanto o integral impróprio é divergente.

Exemplo. $f(x) = 1/\sqrt{x}$ em $[0,1]$.

$$\int_{0^+}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x} \right]_{0^+}^{1} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2 \,,$$

portanto o integral impróprio é convergente, igual a 2.

Integrais Impróprios em a e em b

- Um integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pode ser impróprio em ambos os extremos de integração a e b.
- Nesse caso tomamos $c \in \,]a,b[$ e consideramos os integrais:
$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{e} \quad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Se ambos os integrais forem convergentes o integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diz-se convergente, com valor:
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Caso contrário o integral diz-se divergente.

Regra de Barrow

Teorema

Se f é contínua em $]a,b[\subset D_f$ e G é uma primitiva de f, então

- $\int_a^b f$ é convergente sse $G(b^-) \in \mathbb{R}$ e $G(a^+) \in \mathbb{R}$, e nesse caso:

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,\mathrm{d}t = G(b^-) - G(a^+) = \Big[G(t)\Big]_{a^+}^{b^-}$$

Demonstração. Como G é uma primitiva de f,

$$\int_{a^+}^{b^-} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a^+}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c}^{b^-} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= G(c) - G(a^+) + G(b^-) - G(c) = G(b^-) - G(a^+)$$

Exemplo

- O integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(x^2-x)^2}\,\mathrm{d}x$ é impróprio em 0 e em 1
- Primitivando: $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x^2-x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{x^2-x} + C$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{x^2-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x^2-x} = +\infty$
- Como pelo menos um dos limites não existe em $\mathbb{R}$, o integral é divergente.

Integrais impróprios podem ser definidos mais geralmente.

Exemplo. O integral de $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2}$ em $[-1, 1]$ não está definido, pois f não é limitada neste intervalo. Podemos, no entanto, considerar os integrais impróprios:

$$\int_{-1}^{0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Uma primitiva da função $1/\sqrt[3]{x^2} = x^{-2/3}$ é $F(x) = 3x^{1/3} = 3\sqrt[3]{x}$ e $F(0^-) = F(0^+) = 0$ pelo que os integrais são ambos convergentes e

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x + \int_{0^+}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x &= \Big[3\sqrt[3]{x}\Big]_{-1}^{0^-} + \Big[3\sqrt[3]{x}\Big]_{0^+}^{1} \\ &= 0 - 3\sqrt[3]{-1} + 3\sqrt[3]{1} - 0 = 6\end{aligned}$$