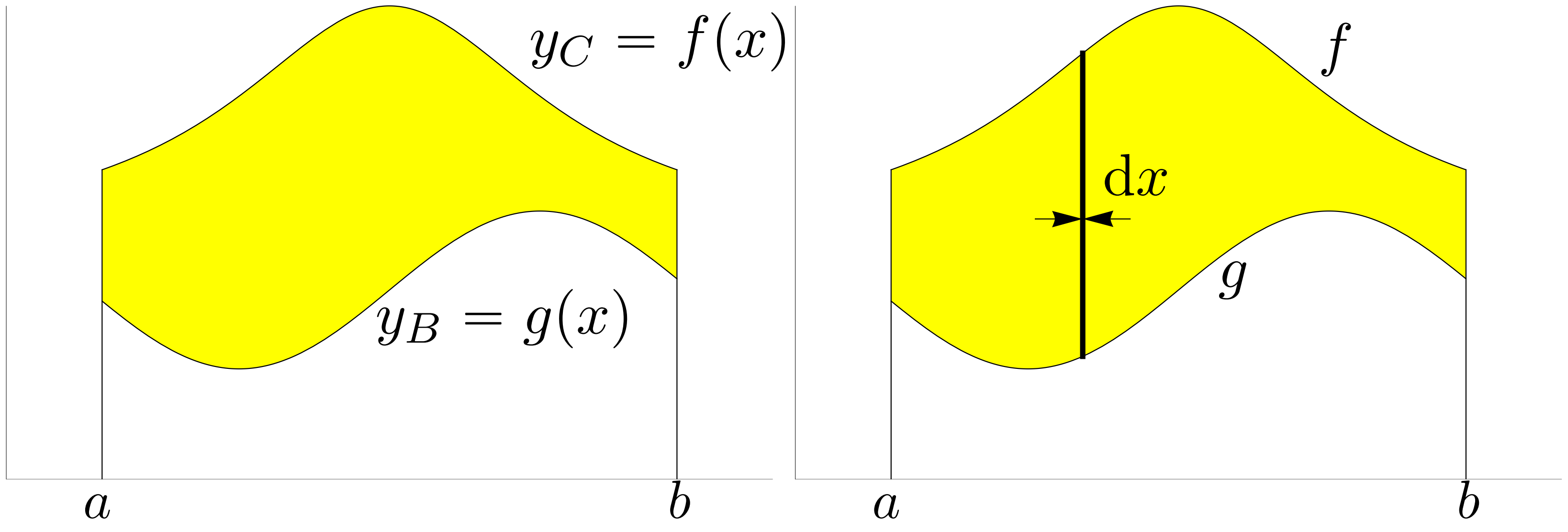
Aula de Hoje: Aplicações do Integral

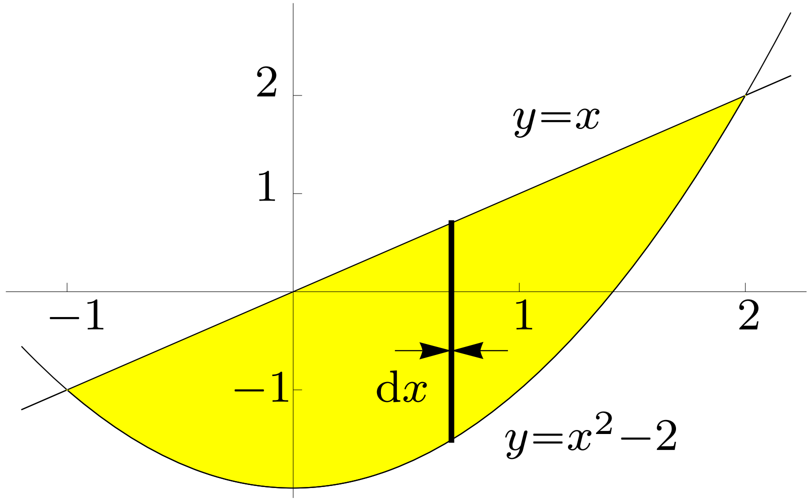
Aplicação ao Cálculo de Áreas

Vamos considerar a região R entre os gráficos de 2 funções f e g:



$$\text{Área}(R) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exemplos



Vamos calcular a área da região entre as curvas

- $y = x^2 - 2$
- $y = x$

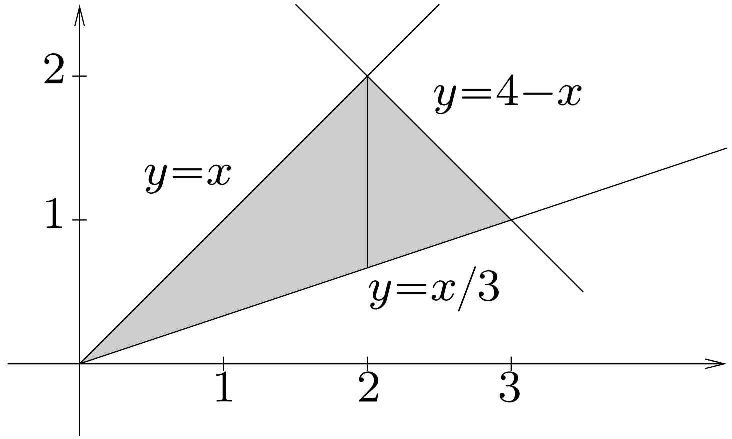
Começamos por calcular os pontos de interseção:

$$x^2 - 2 = x \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \tfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -1, 2\,.$$

A curva de cima é $y_C = x$ e a curva de baixo é $y_B = x^2 - 2$ logo

$$\text{Área}(R) = \int_{-1}^{2} (x - (x^2 - 2))\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(2 - \frac{8}{3} + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}\,.$$



Vamos calcular a área do triângulo com vértices nos pontos $(0,0)$, $(2,2)$ e $(3,1)$ usando integrais.

É conveniente dividir a região em duas regiões:

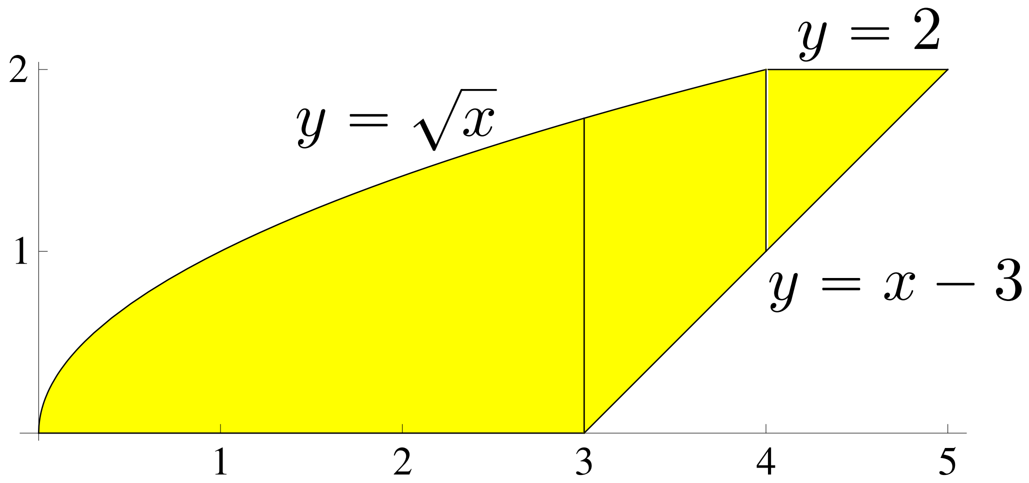
- No intervalo $[0,2]$ temos $y_C = x$ e $y_B = \frac{1}{3}x$, pelo que

$$A_1 = \int_0^2 \left(x - \tfrac{1}{3}x\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \tfrac{2}{3}x \, \mathrm{d}x = \left[\, \tfrac{1}{3}x^2 \,\right]_0^2 = \frac{4}{3}\ .$$

- No intervalo $[2,3]$ temos $y_C = 4 - x$ e $y_B = \frac{1}{3}x$, pelo que

$$A_2 = \int_2^3 \left((4-x) - \tfrac{1}{3}x\right) \mathrm{d}x = \int_2^3 \left(4 - \tfrac{4}{3}x\right) \mathrm{d}x$$
$$= \left[\, 4x - \tfrac{2}{3}x^2 \,\right]_2^3 = (12-6) - \left(8 - \tfrac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}\ .$$

A área total é $A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$.



Queremos calcular a área da região R entre as retas horizontais $y = 0$ e $y = 2$, delimitada à esquerda pela curva $y = \sqrt{x}$ e à direita por $y = x - 3$.

Observando a figura, vemos que

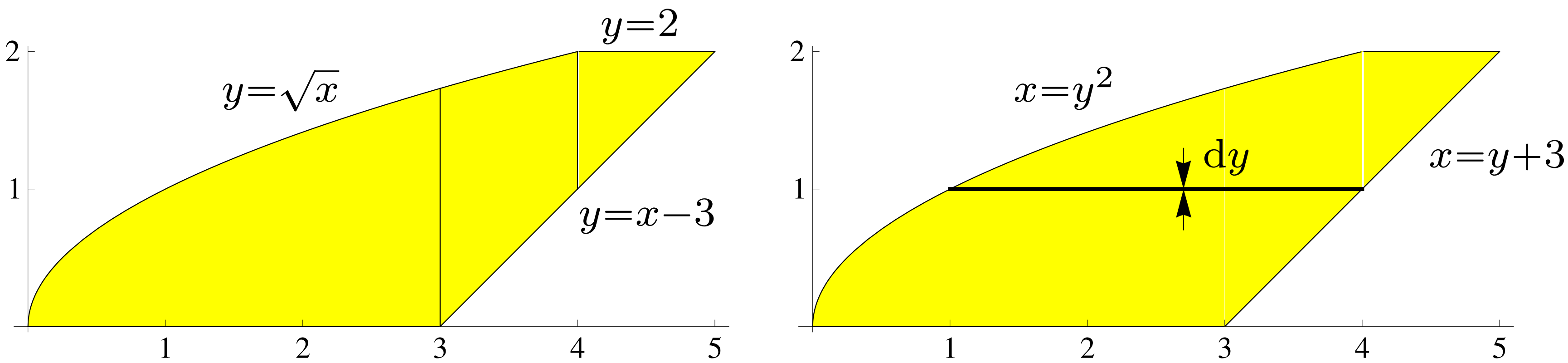
$$y_C = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2 & \text{se } 4 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad y_B = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ x - 3 & \text{se } 3 \leqslant x \leqslant 5\,. \end{cases}$$

Assim, torna-se necessário dividir R em três regiões:

$$\text{Área}(R) = \int_0^3 \sqrt{x} - 0\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \sqrt{x} - (x-3)\,\mathrm{d}x + \int_4^5 2 - (x-3)\,\mathrm{d}x\,.$$

Cálculo de Áreas Integrando em y

É mais simples integrar na variável y.



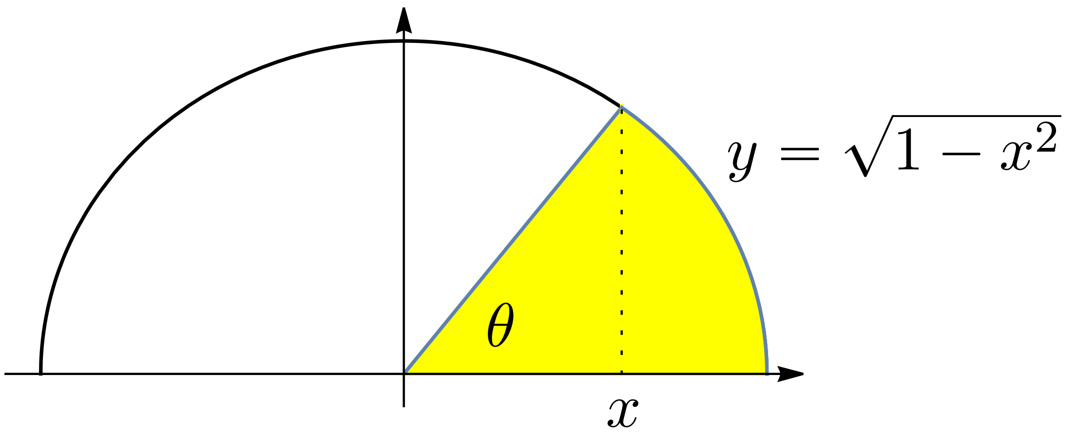
A região é delimitada à esquerda pela curva $x_E = y^2$ e à direita pela curva $x_D = y + 3$, para $0 \leqslant y \leqslant 2$. Assim:

$$\text{Área}(R) = \int_0^2 \left((y+3)-y^2\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{y^2}{2} + 3y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 2+6-\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\,.$$

Definição das Funções Seno e Coseno

- Periodicidade: Basta defini-las em $[-\pi, \pi]$
- Paridade: Basta defini-las em $[0, \pi]$
- O cosseno é decrescente, logo injectivo, em $[0, \pi]$
- $\arccos x$ é a inversa da restrição de $\cos\theta$ a $[0, \pi]$

$$\arccos x = \theta \iff \cos\theta = x \quad \text{e} \quad \theta \in [0, \pi]$$

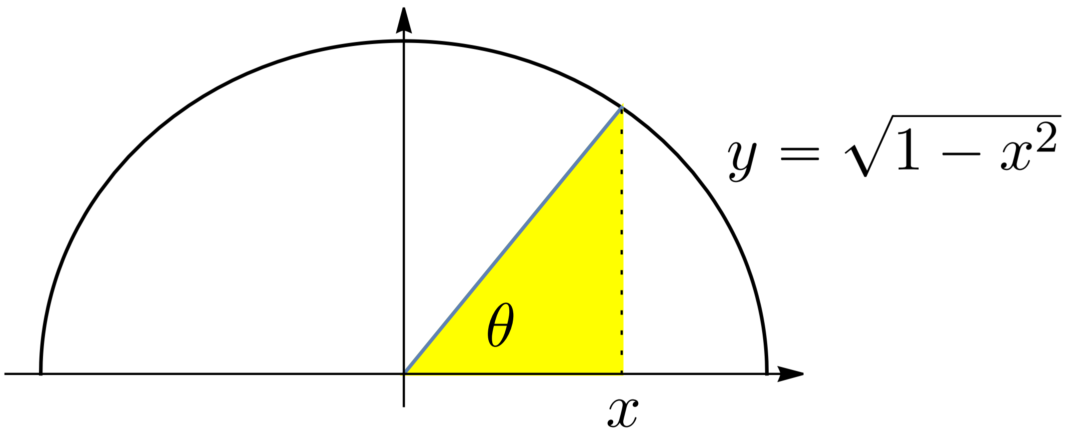


$\theta = 2 \times \text{Área}$

Definição das Funções Seno e Coseno

- Periodicidade: Basta defini-las em $[-\pi, \pi]$
- Paridade: Basta defini-las em $[0, \pi]$
- O cosseno é decrescente, logo injectivo, em $[0, \pi]$
- $\arccos x$ é a inversa da restrição de $\cos\theta$ a $[0, \pi]$

$$\arccos x = \theta \;\Leftrightarrow\; \cos\theta = x \quad \text{e} \quad \theta \in [0, \pi]$$



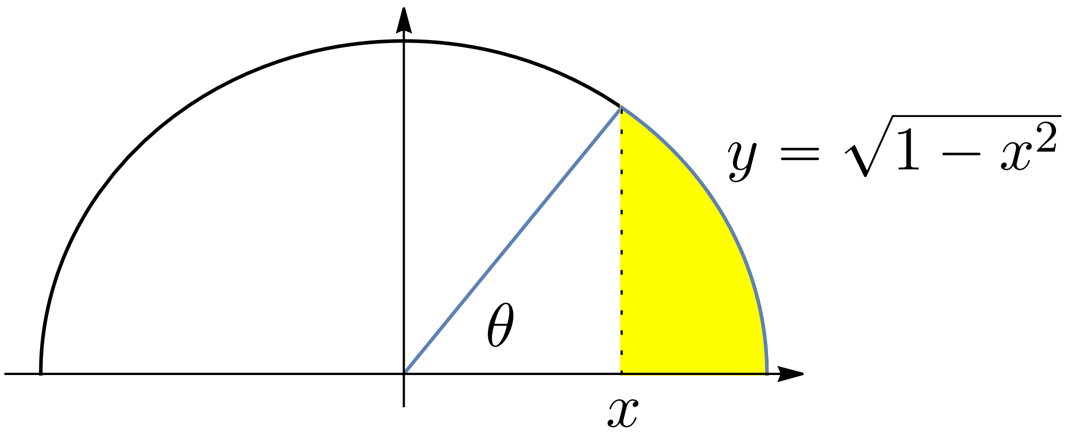
$$\theta = 2 \times \text{Área}$$

$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + \qquad\qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Definição das Funções Seno e Coseno

- Periodicidade: Basta defini-las em $[-\pi, \pi]$
- Paridade: Basta defini-las em $[0, \pi]$
- O cosseno é decrescente, logo injectivo, em $[0, \pi]$
- $\arccos x$ é a inversa da restrição de $\cos\theta$ a $[0, \pi]$

$$\arccos x = \theta \iff \cos\theta = x \quad \text{e} \quad \theta \in [0, \pi]$$



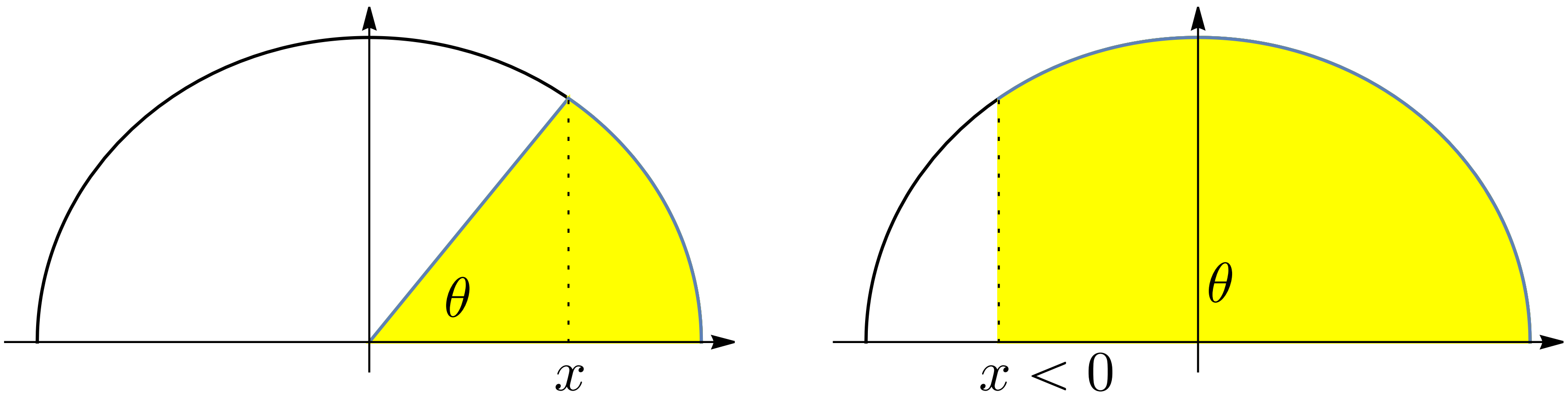
$$\theta = 2 \times \text{Área}$$

$$\arccos x = x\sqrt{1 - x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1 - t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Definição das Funções Seno e Coseno

- Periodicidade: Basta defini-las em $[-\pi, \pi]$
- Paridade: Basta defini-las em $[0, \pi]$
- O cosseno é decrescente, logo injectivo, em $[0, \pi]$
- $\arccos x$ é a inversa da restrição de $\cos\theta$ a $[0, \pi]$

  $\arccos x = \theta \;\Leftrightarrow\; \cos\theta = x \quad \text{e} \quad \theta \in [0, \pi]$



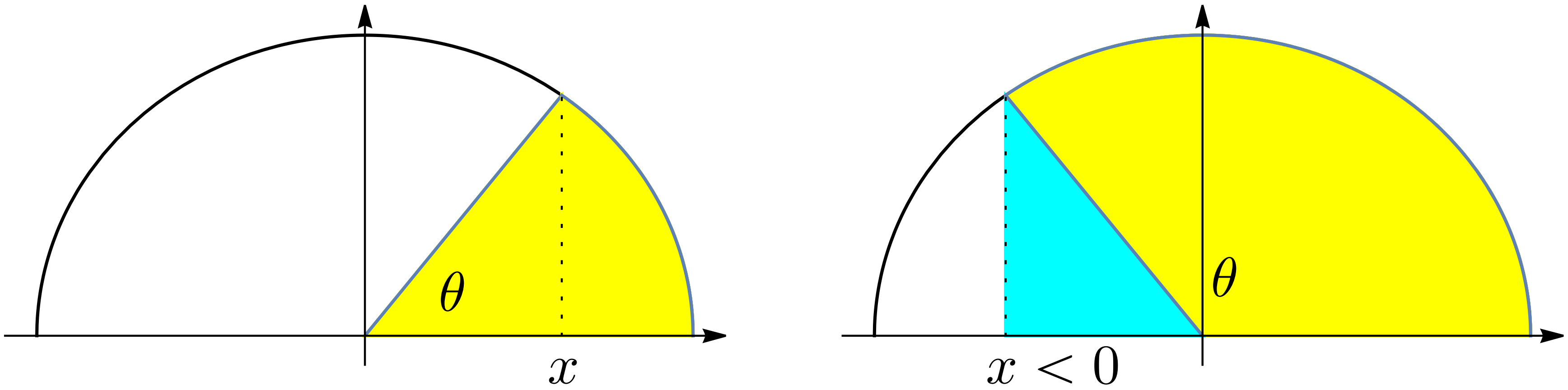
$\theta = 2 \times \text{Área}$

$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Definição das Funções Seno e Coseno

- Periodicidade: Basta defini-las em $[-\pi, \pi]$
- Paridade: Basta defini-las em $[0, \pi]$
- O cosseno é decrescente, logo injectivo, em $[0, \pi]$
- $\arccos x$ é a inversa da restrição de $\cos\theta$ a $[0, \pi]$

  $\arccos x = \theta \;\Leftrightarrow\; \cos\theta = x \quad \text{e} \quad \theta \in [0, \pi]$



$\theta = 2 \times \text{Área}$

$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

A Função Arco Cosseno

$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \sqrt{1-x^2} + x(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2} \\ &= -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

A Função Arco Cosseno

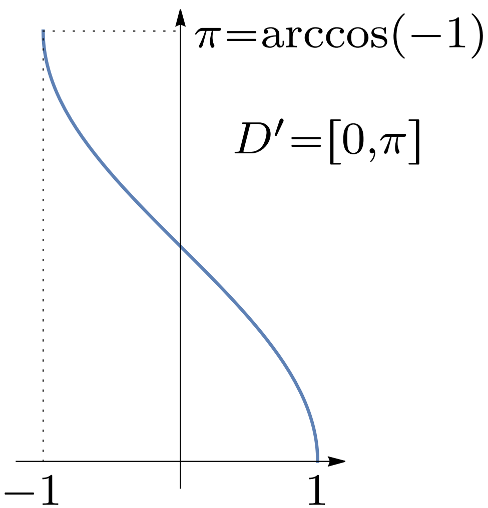
$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

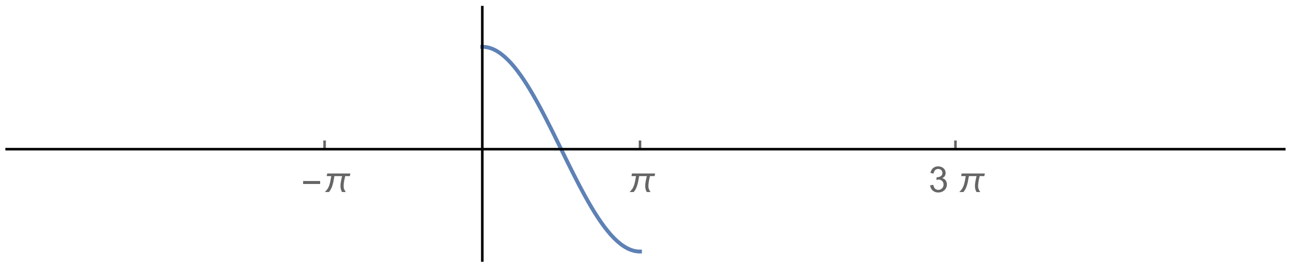
$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \sqrt{1-x^2} + x(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2} \\ &= -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

A Função Arco Cosseno

$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \sqrt{1-x^2} + x(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2} \\ &= -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \neq \pm 1)\end{aligned}$$





A Função Arco Cosseno

$$\arccos x = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \sqrt{1-x^2} + x(-2x)\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2}\\ &= -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x \neq \pm 1)\end{aligned}$$