Apontamentos I

Matrizes e sistemas de equações lineares

Álgebra Linear | aulas teóricas

Licenciatura em Engenharia Naval e Oceânica
Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

1º semestre 2020/21

Lina Oliveira
Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

1

Matrizes, sistemas de equações lineares e método de eliminação de Gauss

Matrizes

Uma **matriz real (respetivamente, complexa) de tipo** $k \times n$ é um quadro

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

de números ou escalares reais (respetivamente, complexos) com k **linhas** e n **colunas**. Os números a_{ij}, para todos os índices $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$, dizem-se as **entradas** da matriz. O índice i indica o número da linha da matriz onde a **entrada**-(ij) (i.e., o escalar a_{ij}) se encontra, e o índice j indica a coluna.

Exemplo

A entrada-(23) da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

é o número que se encontra na linha 2 e na coluna 3, ou seja, $a_{23} = 7$.

A linha i da matriz é

$$L_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \end{bmatrix},$$

e a coluna j é

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{bmatrix}.$$

A matriz pode ser apresentada abreviadamente como $[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}}$, ou apenas $[a_{ij}]$ sempre que o tipo da matriz for claro a partir do contexto.

A matriz diz-se:

- **Matriz retangular**, se $k \neq n$.
- **Matriz quadrada**, se $k = n$. Neste último caso, a matriz diz-se uma matriz quadrada de **ordem** n (ou k).
- **Matriz coluna** ou **vetor coluna**, se $n = 1$.
- **Matriz linha** ou **vetor linha**, se $k = 1$.

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ diz-se estar **em escada de linhas** ou que é uma **matriz em escada de linhas** se satisfizer as duas condições seguintes.

1. Não existem linhas nulas acima de linhas não nulas.
2. Sendo L_i e L_{i+1} duas quaisquer linhas não nulas consecutivas de A, a primeira entrada não nula da linha L_{i+1} encontra-se (numa coluna) à direita (da coluna) da primeira entrada não nula da linha L_i.

A primeira entrada não nula de cada linha duma matriz em escada de linhas designa-se por **pivô**.

Exemplo

A matriz da alínea (a) é uma matriz em escada de linhas cujos pivôs são 1, 4 e 6. As matrizes das alíneas (b) e (c) não são matrizes em escada de linhas.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações elementares

Existem três **operações elementares** sobre as linhas de uma matriz.

- Substituição da linha L_i por $L_i + \alpha L_j$, com α escalar e $i \neq j$.
- Troca da linha L_i com a linha L_j (com $i \neq j$).
- Substituição da linha L_i por αL_i, com $\alpha \neq 0$.

Estas operações aplicar-se-ão seguidamente na resolução de sistemas de equações lineares, altura em que serão descritas.

Sistemas de equações lineares

Uma **equação linear** é uma equação que pode ser apresentada na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, b$ são escalares e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ são as **incógnitas** ou **variáveis**. Um **sistema de equações lineares** (SEL) é uma conjunção de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k22}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}.$$

O sistema diz-se **homogéneo** se $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$ e, caso contrário, diz-se **não homogéneo**.

Resolver um sistema de equações lineares é determinar o conjunto de todas as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n números que satisfazem todas as equações do SEL. Este conjunto diz-se a **solução geral** ou o **conjunto das soluções** do SEL.

Dois sistemas de equações lineares dizem-se **equivalentes** se tiverem a mesma solução geral. Os sistemas de equações lineares classificam-se segundo a sua **natureza**. Um sistema de equações lineares diz-se:

- **possível e determinado**, se tem uma única solução
- **possível e indeterminado**, se tem mais que uma solução. [1]
- **impossível**, se o conjunto das soluções é vazio.

Um sistema de equações lineares homogéneo é sempre possível.

Um SEL homogéneo tem sempre a **solução nula**, i.e., a solução em que todas as variáveis são nulas.

Matrizes associadas ao sistema de equações lineares

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k22} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \qquad \longleftarrow \quad \textbf{Matriz dos coeficientes}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \qquad \longleftarrow \quad \textbf{Matriz (coluna) dos termos independentes}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k22} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right] \qquad \longleftarrow \quad \textbf{Matriz aumentada}$$

A matriz aumentada também pode ser simplesmente representada sem a linha de separação vertical

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k22} & \dots & a_{kn} & b_k \end{bmatrix}.$$

[1] Neste caso, o SEL tem infinitas soluções como se verá adiante na Secção 2.

Como resolver um sistema de equações lineares

Consideremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}.$$

A **matriz aumentada** do sistema é

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Se se efetuar uma operação elementar sobre as linhas da matriz aumentada $[A|b]$, obtém-se a matriz aumentada dum sistema de equações lineares equivalente.

Este facto será usado para "simplificar" a matriz aumentada de modo a obter um sistema equivalente ao inicial mas cuja solução seja mais fácil de determinar.

Objetivo: Reduzir a matriz aumentada a uma matriz em escada de linhas à custa de operações elementares, usando o **método de eliminação de Gauss**.

O **método de eliminação de Gauss** (MEG) consiste em:

1. Colocar todas as linhas nulas da matriz abaixo das linhas não nulas, fazendo as trocas de linhas necessárias.

2. Escolher uma das entradas não nulas situada numa coluna o mais à esquerda possível e colocá-la na primeira linha da matriz, trocando eventualmente linhas.

3. Usar operações elementares para reduzir a zero as entradas situadas na mesma coluna e nas linhas abaixo.

4. Repetir os passos anteriores "descendo" uma linha, i.e., considerando a *submatriz* formada apenas pelas linhas abaixo da linha 1.

5. Continuar o mesmo processo "descendo" mais uma linha, i.e., considerando apenas as linhas abaixo da linha 2.

6. Esta "descida" na matriz repete-se até se obter uma matriz em escada de linhas.

Aplica-se agora o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-L_1 \\ L_3-2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

As operações elementares indicadas sob as setas são as seguintes:

- $L_2 - L_1$ indica que se somou à linha 2 a linha 1 multiplicada por -1, e $L_3 - 2L_1$ indica que se somou à linha 3 a linha 1 multiplicada por -2.
- $L_2 \leftrightarrow L_3$ indica que se trocou a linha 2 com a linha 3.
- $L_3 - 2L_2$ indica que se somou à linha 3 a linha 2 multiplicada por -2.

Note que adotamos a seguinte convenção:

A linha modificada é sempre a primeira a ser escrita. $\leftarrow$ ATENÇÃO

A matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

(Quais são os pivôs?)

está em escada de linhas e é a matriz aumentada do SEL

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - 3z = -4 \\ 7z = 7 \end{cases},$$

tendo-se

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -y - 3z = -4 \\ 7z = 7 \end{cases}.$$

Começando a resolver o SEL pela equação mais simples, ou seja a última, tem-se $z = 1$. Substituindo z na segunda equação, obtém-se

$$-y - 3 = -4,$$

ou seja $y = 1$. Finalmente, usando a última equação e os valores obtidos de y e z, tem-se que

$$x + 1 + 1 = 3$$

e, portanto, $x = 1$. É agora imediato concluir que o conjunto das soluções ou a solução geral é $\{(1, 1, 1)\}$ e que, portanto, o SEL é possível e determinado.

Note que, uma vez obtido o sistema correspondente à matriz (aumentada) em escada de linhas, a resolução faz-se "de baixo para cima": começa-se com a última equação e vai-se "subindo" no sistema.

Em resumo, relembre que se resolve um sistema de equações lineares em três passos:

1. Obtém-se a matriz aumentada $[A|b]$ do sistema;
2. Reduz-se $[A|b]$ a uma matriz R em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss ou, em esquema,

$$[A|b] \xrightarrow[\text{MEG}]{} R$$

3. Resolve-se o SEL cuja matriz aumentada é R.

No exemplo anterior:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{MEG}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = R$$

2

Característica, variáveis dependentes e variáveis independentes

Característica duma matriz

Quando se reduz uma matriz a uma matriz em escada de linhas à custa de operações elementares, o número de pivôs não depende das operações elementares realizadas.

Porquê?

A **característica** duma matriz A de tipo $k \times n$ é o número de pivôs de qualquer matriz em escada de linhas que se obtenha a partir de A à custa de operações elementares. Designa-se por $\operatorname{car} A$ a característica da matriz A.

Exemplo

Resolvamos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} .$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada deste SEL, obtém-se:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se então que

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ -y + 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4z - 3 \\ y = 2z - 3 \end{cases} .$$

Este sistema não tem obviamente solução única.

Como escolher as **variáveis independentes** ou **livres** e as **variáveis dependentes**

- As variáveis dependentes são as variáveis que correspondem às colunas com pivôs.
- As variáveis independentes são as restantes, i.e., as variáveis que correspondem às colunas sem pivôs.

De acordo com a regra acima, as variáveis dependentes são x e y, e a variável independente ou livre é z. A solução geral do sistema é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4z - 3 \wedge y = 2z - 3\}$$

e, portanto, o SEL tem um número infinito de soluções.

O **grau de indeterminação** dum sistema é

$\mathbf{G.I.}$ = número de variáveis independentes
= número de variáveis - número de variáveis dependentes
= número de colunas da matriz dos coeficientes - característica da matriz dos coeficientes
= número de colunas de $A - \operatorname{car} A$

onde A é a matriz dos coeficientes do sistema.

O SEL que acabámos de resolver é possível e indeterminado e o seu grau de indeterminação é

$$\text{G.I.} = 3 - 2 = 1.$$

Soluções particulares

Este sistema tem, com vimos acima, a solução geral

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 4z - 3 \wedge y = 2z - 3\},$$

onde a variável z foi escolhida como a variável independente. Assim, se se fizer $z = 1$, teremos que $(1, -1, 1)$ é uma solução do sistema, dita uma **solução particular**. Por exemplo, outra solução particular do sistema pode ser obtida fazendo $z = 2$. Neste caso, ter-se-á $(5, 1, 2)$ como a solução particular correspondente a $z = 2$.

Em resumo, por cada valor atribuído a z, obtemos uma solução particular do SEL.

Exemplo

Aplicando o MEG ao sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases},$$

obtém-se

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-\frac{1}{2}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2y - 2z = 1 \\ 0 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Conclui-se que o sistema é impossível e que, portanto, a sua solução geral é o conjunto $\varnothing$.

Classificação dos sistemas de equações lineares

Usa-se a noção de característica para classificar os sistemas de equações lineares quanto à sua natureza.

		Natureza do SEL
$\operatorname{car} A = \operatorname{car}[A\|b]$	$\rightarrow$	possível
$\operatorname{car} A \neq \operatorname{car}[A\|b]$	$\rightarrow$	impossível

Note que, quando $\operatorname{car} A \neq \operatorname{car}[A|b]$, a única hipótese é ter-se $\operatorname{car} A < \operatorname{car}[A|b]$.

Possível e determinado	$\rightarrow$	$\operatorname{car} A =$ número de colunas de A
Possível e indeterminado	$\rightarrow$	$\operatorname{car} A <$ número de colunas de A
		G.I. = nº colunas de $A - \operatorname{car} A$

Da análise que temos vindo a fazer, podemos concluir que

Um sistema de equações lineares possível e indeterminado tem um número infinito de soluções.

3

Método de eliminação de Gauss–Jordan

Forma canónica ou reduzida de escada de linhas

Uma matriz diz-se estar em **forma canónica de escada de linhas** ou em **forma reduzida de escada de linhas** se satisfizer as três condições seguintes:

- A matriz está em escada de linhas.
- Os pivôs são todos iguais a 1.
- Em cada coluna com pivô, todas as entradas são iguais a 0 à exceção do pivô.

Exemplo

A matriz A é uma matriz em escada de linhas mas não está em forma canónica de escada de linhas. A matriz B é uma matriz em forma canónica de escada de linhas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de eliminação de Gauss–Jordan

O método de eliminação de Gauss–Jordan é usado para, dada uma matriz, reduzi-la a uma matriz em forma canónica de escada de linhas à custa de operações elementares. Este método desenvolve-se em várias fases, sendo a primeira delas o método de eliminação de Gauss.

Dada uma matriz, o **método de eliminação de Gauss–Jordan** (MEG–J) consiste em:

1. Reduzir a matriz a uma matriz em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss.

2.
   - Usar o pivô situado numa coluna o mais à direita possível (ou seja na linha mais abaixo possível) e as operações elementares necessárias para reduzir a zero as entradas situadas na mesma coluna e nas linhas acima da linha do pivô.
   - Repetir os passos anteriores "subindo" uma linha, i.e., considerando a *submatriz* formada apenas pelas linhas acima da linha do ponto anterior.
   - Continuar o mesmo processo "subindo" mais uma linha, i.e., considerando apenas as linhas acima da linha do segundo pivô considerado.
   - Esta "subida" na matriz repete-se até se chegar à primeira linha da matriz (ou seja, até se obter uma matriz em que, nas colunas dos pivôs, estes são as únicas entradas não nulas).

3. Usar as operações elementares convenientes para obter uma matriz em que todos os pivôs são iguais a 1.

Exemplo

Objetivo: Dada uma matriz, pretende-se reduzi-la a uma matriz em forma canónica de escada de linhas à custa de operações elementares, usando o método de eliminação de Gauss–Jordan.

Apliquemos o método de eliminação de Gauss–Jordan à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

para a reduzir a uma matriz em forma canónica de escada de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2+\frac{1}{2}L_1 \\ L_3+L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3-3L_2 \\ L_4-3L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[L_4-L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[L_1-2L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)L_3 \\ (-1)L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Os pontos 2. e 3. da descrição do MEG–J não têm que ser realizados por esta ordem (i.e., primeiro o ponto 2. e depois o ponto 3.). Pode ser conveniente tornar um pivô igual a 1 (ou até todos os pivôs) antes de completar o ponto 2., ou mesmo antes do ponto 2.
- Nos pontos 2. e 3. do MEG–J não se pode trocar linhas.
- O método de eliminação de Gauss–Jordan também pode ser usado na resolução de sistemas de equações lineares.

Proposição 1. *Seja A uma matriz $k \times n$ e sejam R e R' matrizes em forma canónica de escada de linhas obtidas a partir de A à custa de operações elementares. Então $R = R'$.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em
Thomas Yuster, "The Reduced Row Echelon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof", Mathematics Magazine, Vol. 57, No. 2 (Mar., 1984), pp. 93-94.

A forma canónica de escada de linhas ou **a forma reduzida de escada de linhas duma matriz** A é a matriz em forma canónica de escada de linhas que se obtém de A à custa de operações elementares.

No exemplo anterior, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a forma reduzida de escada de linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A partir de uma mesma matriz A, e à custa de operações elementares, podem-se obter diferentes matrizes em escada de linhas mas somente uma **única** matriz em forma canónica de escada de linhas.

Comentários

- **P:** Como resolver um sistema de equações lineares?

  R: Usando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss–Jordan.

- **P:** Como apresentar a solução de um sistema de equações lineares?

  R: Apresenta-se abaixo um exemplo de várias possibilidades de escrever a solução geral de um sistema de equações lineares (supõe-se que neste exemplo as variáveis são x, y, z e w e que o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 2):

  a) $\{(-z, -z-w, z, w) \, : \, z, w \in \mathbb{R}\}$

  b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x = -z \wedge y = -z - w\}$

  c) $\{(x, y, z, w) \, : \, x = -t \wedge y = -t - s \wedge z = t \wedge w = s \quad (t, s \in \mathbb{R})\}$

  d) $\{(-t, -t-s, t, s) \, : \, t, s \in \mathbb{R}\}$

4

Cálculo matricial

Adição e multiplicação por escalares

Definem-se seguidamente duas operações no conjunto $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes de tipo $k \times n$. [2]

Adição $(+)$

$$\begin{aligned} + : \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \times \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) &\to \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

Sendo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, define-se $A + B = [c_{ij}]$ como a matriz $k \times n$ tal que $c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 11 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad A+B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalares (mpe)

$$\begin{aligned} \text{mpe} : \mathbb{K} \times \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) &\to \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \\ (\alpha, A) &\mapsto \alpha A \end{aligned}$$

Sendo $A = [a_{ij}]$, define-se $\alpha A = [c_{ij}]$ como a matriz $k \times n$ tal que $c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha a_{ij}$.

[2] $\mathbb{K}$ designa $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ conforme as matrizes forem, respetivamente, reais ou complexas.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ -6 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição e da multiplicação por escalares

Quaisquer que sejam as matrizes $A, B, C \in \mathbb{M}_{k\times n}$, tem-se:

i) $A + B = B + A$

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

iii) Existe um **elemento neutro** 0, i.e., qualquer que seja A,

$$A + 0 = A = 0 + A$$

iv) Todo o elemento $A \in \mathbb{M}_{k\times n}$ admite um **elemento simétrico** $-A \in \mathbb{M}_{k\times n}$, i.e.,

$$A + (-A) = 0 = (-A) + A$$

Quaisquer que sejam as matrizes $A, B \in \mathbb{M}_{k\times n}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se:

i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

ii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

iii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

iv) $1A = A$

O elemento neutro da adição é único. O elemento neutro da adição é a matriz nula $[0]$ de tipo $k \times n$.
O elemento simétrico duma matriz $A = (a_{ij})$ é único. O simétrico de A é a matriz $-A = (-a_{ij})$.

Multiplicação de matrizes

Multiplicação duma matriz por um vetor coluna

Seja A uma matriz de tipo $k \times n$ e consideremos um vetor coluna

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{j1} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

de tipo $n \times 1$. Define-se o produto da matriz A e do vetor $\mathbf{b}$

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{k1} \end{bmatrix}$$

como a matriz coluna $A\mathbf{b} = [c_{i1}]_{i=1,\dots,k}$ de tipo $k \times 1$ tal que, para todos os valores dos índices $i = 1, \dots, k$, se tem

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{ij}b_{j1} + \cdots + a_{in}b_{n1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}.$$

Note que, para ser possível multiplicar as matrizes A e $\mathbf{b}$, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de $\mathbf{b}$.

Exemplo

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de tipo 2×3 e 3×1, respetivamente. A multiplicação destas duas matrizes é possível porque o número de colunas de A e o número de linhas de $\mathbf{b}$ coincidem.

O produto $A\mathbf{b}$ será então um vetor coluna de tipo 2×1 tal que

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -37 \end{bmatrix}.$$

A linha 1 de $A\mathbf{b}$ foi calculada usando a linha 1 de A e o vetor coluna $\mathbf{b}$ de acordo com

$$2 \times 7 + (-1) \times (-2) + 5 \times 1 = 21.$$

Analogamente, a linha 2 de $A\mathbf{b}$ foi calculada usando a linha 2 de A e o vetor coluna $\mathbf{b}$, obtendo-se

$$-4 \times 7 + 6 \times (-2) + 3 \times 1 = -37.$$

Como pode ser facilmente verificado na expressão geral do produto $A\mathbf{b}$, o cálculo duma linha i (genérica) da matriz $A\mathbf{b}$ faz-se usando também a linha i da matriz A.

Voltando à definição geral de $A\mathbf{b}$, ainda podemos exprimir o produto de outro modo:

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{j1} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \cdots + a_{kn}b_{n1} \end{bmatrix}.$$

Temos então que

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1} \\ \vdots \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \cdots + a_{kn}b_{n1} \end{bmatrix} = b_{11}\mathbf{c}_1 + b_{21}\mathbf{c}_2 + \cdots + b_{n1}\mathbf{c}_n,$$

onde $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ são as colunas de A.

Seja $A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \ldots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$ uma matriz de tipo $k \times n$, designa-se por **combinação linear das colunas de** A qualquer vetor coluna da forma

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{c}_n,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são escalares.

Podemos então concluir que:

O produto $A\mathrm{b}$ duma matriz A e dum vetor coluna b é uma combinação linear das colunas da matriz A.

Multiplicação de duas matrizes

Para ser possível multiplicar duas matrizes A e B, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de $\mathbf{b}$.

Dadas matrizes A de tipo $k \times p$ e B de tipo $p \times n$, define-se o produto

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{il} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kl} & \ldots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \ldots & b_{lj} & \ldots & b_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pj} & \ldots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

como a matriz $AB = [c_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}}$ de tipo $k \times n$ tal que, para todos os índices i, j, se tem

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{il}b_{lj} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lj}\,.$$

O cálculo da entrada-(ij) da matriz AB faz-se multiplicando a linha i da matriz A pela coluna j da matriz B.

Exemplo

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

de tipo 2×3 e 3×3, respetivamente. A multiplicação destas duas matrizes é possível porque o número de colunas de A e o número de linhas de B coincidem. O produto AB será então a matriz de tipo 2×3

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -1 & -17 \\ -37 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

A <u>entrada-(11)</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 1 de A</u> e a <u>coluna 1 de B</u> de acordo com

$$2 \times 7 + (-1) \times (-2) + 5 \times 1 = 21.$$

A <u>entrada-(12)</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 1 de A</u> e a <u>coluna 2 de B</u> de acordo com

$$2 \times 0 + (-1) \times 1 + 5 \times 0 = -1.$$

A <u>entrada-(13)</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 1 de A</u> e a <u>coluna 3 de B</u> de acordo com

$$2 \times (-1) + (-1) \times 0 + 5 \times (-3) = -17.$$

Analogamente, <u>a linha 2</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 2 de A</u> e <u>todas as colunas de B</u>.

O produto AB de matrizes A de tipo $k \times p$ e B de tipo $p \times n$ pode ainda ser descrito por colunas como

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b_1} & | & A\mathbf{b_2} & | & \cdots & | & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n}$ são as colunas de B. Alternativamente, o produto AB pode ainda ser apresentado por linhas

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1}B \\ \mathbf{a_2}B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_kB \end{bmatrix},$$

sendo $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ são as linhas de A.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Quaisquer que sejam as matrizes A, B, C de tipos apropriados e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se:

i) $A(BC) = (AB)C$

ii)
$$(A+B)C = AC + BC$$
$$A(B+C) = AB + AC$$

iii) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

A multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa.

Por exemplo, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

Sistemas de equações lineares e multiplicação de matrizes

Consideremos um sistema de k equações lineares a n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e designemos por A a matriz dos coeficientes (de tipo $k \times n$), por $\mathbf{b}$ o vetor coluna dos termos independentes e por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o vetor coluna das variáveis. O SEL pode agora ser apresentado como a **equação matricial**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

No caso de $\mathbf{b}$ ser o vetor coluna nulo, temos um SEL homogéneo que é representado pela equação

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Exemplo

O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

é apresentado em notação matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Potências de matrizes

Sendo A uma matriz quadrada de ordem k, define-se a potência de expoente n de A, com $n \in \mathbb{N}_0$, de acordo com o seguinte:

$$\begin{aligned} A^0 &= I_k \\ A^1 &= A \\ A^n &= AA^{n-1} \qquad (n \geq 2) \end{aligned}$$

Ou seja, quando n é um inteiro maior ou igual a 1, A^n é o produto de n fatores iguais a A:

$$A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n}$$

Proposição 2. *Seja A uma matriz quadrada e sejam $n, m \in \mathbb{N}_0$.*

i) $A^{n+m} = A^n A^m$

ii) $(A^n)^m = A^{nm}$

Matriz transposta

Sendo A uma matriz de tipo $k \times n$, a **matriz transposta de** A, que se designa por A^T, é a matriz de tipo $n \times k$ definida por

$$A^T = [c_{ij}] \qquad \text{com} \qquad c_{ij} = a_{ji} \;.$$

Exemplo

A matriz transposta A^T da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da operação $\cdot^{\boldsymbol{T}} : \mathbb{M}_{k\times n} \to \mathbb{M}_{n\times k}$

Proposição 3. *Quaisquer que sejam as matrizes A, B de tipos apropriados e o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se:*

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *"a transposta da soma é a soma das transpostas"*

iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

"a transposta do produto é o produto das transpostas por ordem contrária"

Uma matriz quadrada diz-se uma **matriz simétrica** se

$$A = A^T$$

ou, equivalentemente, se

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{para todos os índices } i, j.$$

Uma matriz quadrada A diz-se uma **matriz anti-simétrica** se

$$A = -A^T$$

ou, equivalentemente, se

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad \text{para todos os índices } i, j.$$

Exemplo

Considerem-se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é simétrica e a matriz B é anti-simétrica.

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, a **diagonal** da matriz A é constituída pelas n entradas a_{ii}, com $i = 1, \ldots, n$. Note que:

- A diagonal duma matriz anti-simétrica é nula, i.e., todas as entradas da diagonal são iguais a 0.
- A diagonal duma matriz simétrica "funciona como um espelho".
- Qualquer matriz A se pode escrever como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Traço

Sendo $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n, define-se o **traço** da matriz A como

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposição 4. *Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n e seja α um escalar. Tem-se:*

(i) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;

(ii) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$;

(iii) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^T$

(iv) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Note que, embora a multiplicação de matrizes não seja uma operação comutativa, pode acontecer que, dadas duas matrizes A e B, se tenha $AB = BA$. Por exemplo, se A for uma matriz $n \times n$ e se B for a matriz nula $n \times n$, é claro que $AB = BA$, o mesmo acontecendo se $B = A$.

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Diz-se que as matrizes A e B **comutam** se $AB = BA$.

Na página seguinte, vai encontrar uma matriz quadrada de ordem n que comuta com todas as matrizes quadradas da mesma ordem: trata-se da matriz identidade $n \times n$.

5

Matriz inversa

Matriz inversa

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ diz-se uma **matriz diagonal** se todas as suas entradas a_{ij}, com $i \neq j$, são nulas. Por outras palavras, A é uma matriz diagonal se todas as suas entradas "fora" da diagonal são iguais a 0. Por exemplo, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes diagonais.

A **matriz identidade de ordem** n, designada por I_n, é a matriz diagonal de ordem n em que todas as entradas da diagonal são iguais a 1. A matriz identidade poderá ser designada por I quando a sua ordem for aparente no contexto.

Proposição 5. *Seja A uma matriz de tipo $n \times k$ e seja B uma matriz $k \times n$. Então:*

i) $I_n A = A$.

ii) $B I_n = B$.

No conjunto $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas de ordem n, a multiplicação de quaisquer duas matrizes é sempre possível e o produto é ainda uma matriz quadrada de ordem n.

No conjunto $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas de ordem n, a matriz identidade I_n é o elemento neutro da multiplicação de matrizes: qualquer que seja a matriz A em $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$AI = A = IA\,.$$

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Uma matriz B diz-se **matriz inversa** de A se

$$AB = I = BA\,. \tag{1}$$

Note que, se a matriz B existir, B é uma matriz quadrada de ordem n.

Lema 1. *Se existir uma matriz B nas condições de (1), essa matriz é única.*

Demonstração. Suponhamos que B e C são matrizes inversas de A. Então

$$B(AC) = BI = B \qquad \text{e} \qquad (BA)C = IC = C.$$

Uma vez que a multiplicação de matrizes é associativa, tem-se $B(AC) = (BA)C$ e, consequentemente, $B = C$. $\square$

Podemos assim designar por A^{-1} a (única) matriz inversa de A. A matriz A diz-se **invertível** ou **não singular** se admitir matriz inversa.

Alguns dos exemplos seguintes estão propositadamente incompletos para que o leitor possa fazer uma aplicação direta do conceito de matriz inversa.

Exemplos

- A matriz inversa $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]^{-1}$ da matriz identidade de ordem 2 é

  ____

- $\left[\begin{smallmatrix}2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left(2\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right)^{-1} =$ ________________________________

- Uma matriz com uma linha nula não é invertível porque ...

- Uma matriz com uma coluna nula não é invertível porque ...

- Seja A uma matriz invertível e consideremos um sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Multiplicando à esquerda ambos os membros da equação por A^{-1}, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} &\Leftrightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

  Vemos assim que nestas condições o sistema de equações lineares é possível e determinado.

Cálculo da matriz inversa

Consideremos por exemplo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, procuraremos determinar se a matriz A é invertível e, em caso afirmativo, calcular a sua inversa. Pretendemos então, se possível, determinar uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

tal que $AB = I$ e $BA = I$.

Começando por analisar a equação $AB = I$, tem-se

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, teremos que resolver os dois sistemas

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que ambos os sistemas têm a mesma matriz dos coeficientes, resolvê-los-emos em simultâneo, usando o método de eliminação de Gauss–Jordan. Assim,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2+L_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1-2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[-1L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Concluimos pois que a única matriz B que satisfaz $AB = I$ é

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para concluir que a matriz A é invertível e que a sua inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

basta verificar também se se tem $BA = I$, o que de facto acontece.

Em resumo, podemos descrever os cálculos que acabámos de fazer esquematicamente como:

1. Resolvemos os sistemas $AB = I$ usando o método de eliminação de Gauss–Jordan:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] = [I|B]$$

2. Verificámos que $BA = I$.

3. Concluimos que $A^{-1} = B$.

O passo 2. acima pode ser evitado como mostra a proposição seguinte.

Proposição 6. *Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Então $AB = I$ se e só se $BA = I$.*

Esta proposição será demonstrada adiante (cf. Proposição 9).

Finalmente, resumimos o procedimento geral para calcular a matriz inversa (se existir) duma matriz quadrada A de ordem n.

Reduz-se a matriz $[A|I]$ à matriz $[I|A^{-1}]$ usando o método de eliminação de Gauss–Jordan:

$$[A|I] \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} [I|A^{-1}]$$

Propriedades da matriz inversa

Proposição 7. *Sejam A e B matrizes invertíveis, seja α um escalar não nulo e seja $n \in \mathbb{N}_0$. Então as matrizes A^{-1}, AB, A^n, αA, A^T são invertíveis, e*

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$

v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ *("a inversa da transposta é a transposta da inversa")*

Demonstração. Demonstra-se apenas a propriedade ii). As demonstrações das outras afirmações ficam como exercício.

Calculando diretamente $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ e atendendo a que a multiplicação é associativa, tem-se

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

A Proposição 6 garante agora que $B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de AB. $\square$

A Proposição 7 permite agora definir as potências inteiras duma matriz invertível A de forma inequívoca. Seja então A uma matriz invertível e seja $n \in \mathbb{N}$. Define-se a potência de base A e expoente $-n$ como

$$A^{-n} = (A^n)^{-1} \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad A^{-n} = (A^{-1})^n.$$

No caso das matrizes invertíveis, obtemos a seguinte versão da Proposição 2 alargada aos inteiros.

Proposição 8. *Seja A uma matriz invertível e sejam $r, s \in \mathbb{Z}$.*

i) $A^{r+s} = A^rA^s$

ii) $(A^r)^s = A^{rs}$

6

Matrizes elementares

Matrizes elementares de ordem n

As **matrizes elementares de ordem** n são obtidas a partir da matriz identidade à custa de uma única operação elementar. Seguidamente descrevem-se os três tipos diferentes de matrizes elementares.

Matrizes elementares de ordem n

- P_{ij}: matriz que resulta de I trocando a linha i com a linha j (sendo I a matriz identidade de ordem n e $i \neq j$)
- $E_{ij}(\alpha)$ (com $i \neq j$): matriz que resulta de I somando à linha i a linha j multiplicada por α
- $D_i(\alpha)$ (com $\alpha \neq 0$): matriz que resulta de I multiplicando a linha i por α

Nas figuras seguintes, apresentam-se exemplos dos diferentes tipos de matrizes elementares no caso particular de $i < j$. As linhas e as colunas i estão representadas a amarelo, e as linhas e as colunas j estão representadas a cinzento.

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por matrizes elementares

Sendo A uma matriz $n \times p$, descrevem-se em seguida as matrizes que resultam de A após a multiplicação desta pelas matrizes elementares (à esquerda).

- $A' = P_{ij}A$

A' é a matriz que se obtém de A trocando a linha i com a linha j. Utilizando a notação já estabelecida, tem-se:

$$A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} A' = P_{ij}A$$

- $A' = E_{ij}(\alpha)A$

  A' é a matriz que se obtém de A somando à linha i a linha j multiplicada por α. Ou seja,

$$A \xrightarrow[L_i + \alpha L_j]{} A' = E_{ij}(\alpha)A$$

- $A' = D_i(\alpha)A$

  A' é a matriz que se obtém de A multiplicando a linha i por α,

$$A \xrightarrow[\alpha L_i]{} A' = D_i(\alpha)A$$

Efetuar uma operação elementar sobre uma matriz A corresponde a multiplicar essa matriz à esquerda por uma matriz elementar específica. Na tabela abaixo apresenta-se a correspondência entre as operações elementares e a multiplicação pelas matrizes elementares.

"Dicionário"

Operação elementar	Multiplicação pela matriz elementar
$A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} A'$	$P_{ij}A = A'$
$A \xrightarrow[L_i + \alpha L_j]{} A'$	$E_{ij}(\alpha)A = A'$
$A \xrightarrow[\alpha L_i]{} A'$	$D_i(\alpha)A = A'$

Exemplo

O cálculo da matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

que fizémos na Secção 5 pode agora ser descrito usando a multiplicação por matrizes elementares. As operações elementares que efetuámos sobre a matriz $[A|I]$ correspondem a termos efetuado as seguintes multiplicações por matrizes elementares:

Operação elementar	Multiplicação pela matriz elementar
$L_2 + L_1$	$[E_{21}(1)A \mid E_{21}(1)I]$
$L_1 + (-2)L_2$	$[E_{12}(-2)E_{21}(1)A \mid E_{12}(-2)E_{21}(1)I]$
$(-1)L_2$	$[D_2(-1)E_{12}(-2)E_{21}(1)A \mid D_2(-1)E_{12}(-2)E_{21}(1)I]$

Obteve-se deste modo

$$D_2(-1)E_{12}(-2)E_{21}(1)A = I \qquad D_2(-1)E_{12}(-2)E_{21}(1)I = A^{-1}$$

(cf. Secção 5). Assim, a matriz A^{-1} é o produto de matrizes elementares

$$A^{-1} = D_2(-1)E_{12}(-2)E_{21}(1).$$

Matrizes inversas das matrizes elementares

As matrizes elementares são invertíveis e as suas matrizes inversas são matrizes elementares do mesmo género. Não é difícil verificar que:

Matrizes inversas das matrizes elementares

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$$

$$(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

$$(D_i(\alpha))^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Demonstraremos agora a Proposição 6, cujo enunciado relembramos em seguida.

Proposição 9. *Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Então $AB = I$ se e só se $BA = I$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $AB = I$ e sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrizes elementares tais que $E_1E_2 \ldots E_kA$ é a forma canónica de escadas de linhas de A. A forma canónica de escada de linhas de A não pode ter qualquer linha nula. De facto, se essa matriz tivesse linhas nulas, como

$$E_1E_2 \ldots E_kAB = E_1E_2 \ldots E_kI,$$

a matriz $E_1E_2 \ldots E_kI$ também teria, o que é impossível já que esta matriz é invertível por ser o produto de matrizes invertíveis (cf. Proposição 7 ii)). Concluimos assim que

$$\underbrace{E_1E_2 \ldots E_kA}_{I}B = E_1E_2 \ldots E_k.$$

Ou seja, a matriz B é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, é invertível. Multiplicando à direita ambos os membros da igualdade $AB = I$ por B^{-1}, tem-se que

$$(AB)B^{-1} = IB^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = B^{-1}.$$

Resulta agora diretamente da definição de matriz inversa que $AB = BA = I$.

Trocando os papeis das matrizes A e B no raciocínio acima, analogamente se mostra que, se $BA = I$, então $AB = I$. □

Proposição 10. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é invertível se e só se* $\operatorname{car} A = n$.

Demonstração. Temos que demonstrar as duas implicações

$$\operatorname{car} A = n \;\Rightarrow\; A \text{ é invertível}$$

e

$$A \text{ é invertível} \;\Rightarrow\; \operatorname{car} A = n.$$

Comecemos por demonstrar a primeira. Suponhamos que A é uma matriz quadrada A de ordem n com característica n. Então os sistemas de equações lineares

$$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\qquad A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\qquad\ldots\qquad A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

são possíveis e determinados. Consequentemente, existe uma matriz quadrada B de ordem n tal que $AB = I$. Usando agora a Proposição 9, concluimos que A é invertível.

Resta agora provar a implicação:

$$A\,\text{é invertível} \Rightarrow \operatorname{car} A = n$$

Provaremos a implicação equivalente:

$$\operatorname{car} A \neq n \Rightarrow A\,\text{não é invertível}$$

Se $\operatorname{car} A < n$, qualquer dos sistemas de equações lineares acima é impossível ou possível e indeterminado. No caso de haver algum sistema impossível, é imediato que A não tem inversa. No caso restante de todos os sistemas serem possíveis e indeterminados, teremos a existência de mais do que uma solução, o que contradiz a unicidade da matriz inversa. □

O teorema seguinte apresenta condições necessárias e suficientes de invertibilidade para uma matriz quadrada de ordem n, sendo uma primeira versão de quatro versões que aparecerão ao longo destes apontamentos.

Condições necessárias e suficientes de invertibilidade (I)

Teorema 1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) *A é invertível.*

ii) $\operatorname{car} A = n$.

iii) *A é um produto de matrizes elementares.*

iv) *A pode ser transformada na matriz identidade à custa de operações elementares.*

v) *A forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade.*

vi) *O sistema de equações lineares homogéneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *admite apenas a solução trivial.*

vii) *Dada uma matriz coluna* $\mathbf{b}$ *de tipo* $n \times 1$*, o sistema de equações lineares* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *é possível e determinado.*

Demonstração. Mostraremos que

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow v) \Rightarrow vi) \Rightarrow vii) \Rightarrow i).$$

A equivalência entre $i)$ e $ii)$ já foi demonstrada (cf. Proposição 10).

$ii) \Rightarrow iii)$ Sendo R a forma canónica de escada de linhas de A, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que $E_1 E_2 \ldots E_k A = R$.

Como por definição $\operatorname{car} A = \operatorname{car} R$, tem-se que $\operatorname{car} R = n$. Então $R = I$ e $E_1 E_2 \ldots E_k A = I$. Multiplicando à esquerda ambos os membros desta igualdade sucessivamente por ${E_1}^{-1}, {E_2}^{-1}, \ldots, {E_k}^{-1}$, tem-se

$$A = {E_k}^{-1} \cdots {E_2}^{-1} {E_1}^{-1},$$

donde se conclui que A é um produto de matrizes elementares.

$iii) \Rightarrow iv)$ Se A é um produto de matrizes elementares, então A é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, invertível também (cf. Proposição 7). Nestas condições, a Proposição 10 garante que $\operatorname{car} A = n$, donde se conclui que a forma canónica de escada de linhas de A é a matriz identidade, como pretendíamos.

$iv) \Rightarrow v)$ Esta implicação é óbvia (trata-se mesmo de uma equivalência).

$v) \Rightarrow vi)$ Se a forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade, então existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_1 E_2 \ldots E_k A = I.$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros da equação $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por $E_1 E_2 \ldots E_k$, tem-se

$$\underbrace{E_1 E_2 \ldots E_k A}_{I} \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

vi) $\Rightarrow$ *vii)* Começaremos por ver que, qualquer que seja o vetor coluna $\mathbf{b}$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível.

Suponhamos contrariamente que existia $\mathbf{b}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é impossível. Então ter-se-ia car $A < n$ e, consequentemente, o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seria indeterminado, o que contradiria a hipótese.

Vejamos agora que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é determinado. Suponhamos que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ são soluções $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Então

$$A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}.$$

Como por hipótese o sistema homogéneo só admite a solução trivial, concluimos que

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

vii) $\Rightarrow$ *i)* Queremos agora provar que A é invertível, ou seja, queremos provar que existe uma matriz B tal que $AB = I$ (cf. Proposição 9). Por outras palavras, pretende-se mostrar que os n sistemas abaixo são possíveis [3] :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \dots \qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A afirmação *vii)* garante precisamente que os sistemas da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ são possíveis (e determinados). Como os sistemas anteriores são um caso particular dos sistemas da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, conclui-se que são possíveis e que, portanto, A é invertível. $\square$

[3] Note que, se os n sistemas forem simultaneamente possíveis, então são necessariamente determinados, dada a unicidade da matriz inversa.

7

Determinantes: axiomática e cálculo

A função **determinante**

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

é a função que satisfaz os axiomas seguintes:

i) $\det I = 1$

ii) $\det(P_{ij}A) = -\det A$ (com $i \neq j$)

iii) Qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\det \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha L \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} \vdots \\ L \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + L_i' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

onde L, L_i, L_i' são linhas das matrizes. (Note que α pode ser 0.)

Prova-se que existe uma única função que satisfaz os axiomas acima.

O determinante duma matriz A também pode ser designado por $|A|$.

Exemplo

Cálculo do determinante duma matriz 1×1 e duma matriz diagonal.

1. $\det[a] = a \det[1] = a1 = a$ (usámos o Axioma iii)).

2. Após uma aplicação repetida do Axioma iii) obtém-se

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando o Axioma i), tem-se

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \det I \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}1 \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \end{aligned}$$

Proposição 11.

i) *Uma matriz com duas linhas iguais tem determinante nulo.*

ii) *O determinante de uma matriz com uma linha nula é igual a 0.*

iii) *O determinante de uma matriz não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por um escalar.*

Demonstração. i) Sendo A uma matriz com a linha i igual à linha j (com $i \neq j$), tem-se que $A = P_{ij}A$ e, consequentemente,

$$\det A = \det(P_{ij}A).$$

Por outro lado, o Axioma ii) garante que $\det(P_{ij}A) = -\det A$. Tem-se então que

$$\det A = \det(P_{ij}A) = -\det A$$

e que, portanto,

$$\det A = -\det A \Leftrightarrow 2\det A = 0 \Leftrightarrow \det A = 0.$$

ii) Seja L_i a linha nula da matriz A e seja A' a matriz que se obtém de A multiplicando a linha L_i por $\alpha = 0$. Usando o Axioma iii), tem-se

$$\det A = \det A' = \alpha \det A = 0 \det A = 0.$$

iii) Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Usando o Axioma iii), obtém-se

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i+\alpha L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ \alpha L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Atendendo a que a última matriz tem duas linhas iguais, a afirmação i) deste teorema conduz a que

$$\det\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i+\alpha L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \alpha\det\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$
$$= \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + 0 = \det A$$

□

Cálculo do determinante duma matriz triangular superior

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n diz-se uma **matriz triangular superior** se, quaisquer que sejam $i, j = 1, \ldots, n$ com $i > j$, se tem $a_{ij} = 0$. Ou seja, uma matriz triangular superior tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sendo A uma matriz triangular superior, dois casos podem ocorrer:

1. A matriz A tem todas as entradas da diagonal diferentes de 0.
2. A matriz A tem alguma entrada nula na diagonal.

No primeiro caso, usando apenas operações elementares em que se substitui uma linha L_i por $L_i + \alpha L_j$ (com $i \neq j$ e $\alpha \neq 0$), o método de eliminação de Gauss–Jordan dá origem a uma matriz diagonal. (Note que a forma canónica de escadas de linhas de A é a matriz identidade). Assim,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(Note que interrompemos o método de eliminação de Gauss–Jordan no momento em que se obteve uma matriz diagonal, muito embora as entradas da diagonal possam não ser necessariamente iguais a 1). Usando agora a Proposição 11 iii), temos

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

No segundo caso, seja a_{kk} a primeira entrada nula da diagonal, a contar de baixo. Usando o método de eliminação de Gauss–Jordan e as entradas $a_{nn}, \ldots, a_{k+1,k+1}$, é possível transformar a linha k (a amarelo) da matriz numa linha nula. Ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{MEG-J}]{}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Atendendo a que, mais uma vez, só se utilizaram operações elementares em que se substituiu uma linha L_i por $L_i + \alpha L_j$ (com $i \neq j$ e $\alpha \neq 0$), pela Proposição

11 iii) tem-se

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0.$$

Concluimos assim que o determinante duma matriz triangular superior é igual ao produto das entradas da diagonal.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Os axiomas da função determinante conjuntamente com a Proposição 11 esclarecem completamente como as operações elementares alteram o determinante. Além disso,

A forma de escada de linhas de uma matriz quadrada $n \times n$ é uma matriz triangular superior. Se a matriz tiver característica n, a sua forma reduzida de escada de linhas é uma matriz diagonal (a matriz identidade).

Assim, possuimos agora toda a informação necessária para calcular o determinante de qualquer matriz quadrada. Vamos agora fazer o cálculo do determinante num exemplo concreto.

Exemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{|B|} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) = -6.$$

Note que a matriz A resulta da matriz B após a multiplicação da linha 1 de B por 3 (cf. Axioma iii)).

Cálculo do determinante duma matriz A

1. Reduz-se a matriz A a uma matriz triangular superior A' usando o MEG.
2. Calcula-se o determinante de A à custa do cálculo do determinante A', tendo em conta como as operações elementares efetuadas alteraram o determinante.

Cálculo do determinante duma matriz 2×2

Sendo A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

consideremos separadamente os casos $a \neq 0$ e $a = 0$.

- $a \neq 0$

  Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[L2-\frac{c}{a}L_1]{} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{bmatrix},$$

  donde se conclui que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d-\frac{c}{a}b \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- $a = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

  donde se conclui que

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix} = -cb = ad - bc.$$

Em resumo, o determinante duma matriz quadrada A de ordem 2 é:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

8

Determinantes, invertibilidade e fórmula de Laplace

Determinante e invertibilidade

Determinantes das matrizes elementares

Os determinantes das matrizes elementares calculam-se sem dificuldade usando os resultados da Secção 7.

- $\det P_{ij} = -1$ (P_{ij} resulta da matriz identidade trocando duas linhas; cf. Axioma ii))
- $\det E_{ij}(\alpha) = 1$ (cf. Proposição 11 iii))
- $\det D_i(\alpha) = \alpha$ (cf. ax. 3)

Quando se multiplica uma matriz A à esquerda por uma matriz elementar E obtém-se a matriz EA cujo determinante se calcula imediatamente relembrando como as operações elementares modificam o determinante. Temos assim

$$|P_{ij}A| = -|A| \qquad |E_{ij}(\alpha)A| = |A| \qquad |D(\alpha)A| = \alpha|A|\,.$$

Podemos pois concluir que:

Proposição 12. *Seja A uma matriz de ordem n e seja E uma matriz elementar da mesma ordem. Então*

$$|EA| = |E||A|$$

Teorema 2. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) A é invertível.

ii) $|A| \neq 0$.

Demonstração. i) $\Rightarrow$ ii) Suponhamos que A é invertível. O Teorema 1 assegura que existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k.$$

Então, usando a Proposição 12, tem-se

$$|A| = |E_1||E_2| \cdots |E_k|$$

e, sendo o determinante de cada uma das matrizes elementares diferente de zero, resulta que $|A| \neq 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Demonstraremos a afirmação equivalente:

$$A \text{ não é invertível} \Rightarrow |A| = 0$$

Suponhamos então que A não é invertível. O Teorema 1 garante que car $A < n$ e que, portanto, a forma reduzida de escada de linhas R da matriz A tem uma linha nula. Sabemos ainda que existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_m$ tais que

$$E_1 E_2 \cdots E_m A = R.$$

Podemos então concluir, aplicando a Proposição 12 e a Proposição 11, que

$$|E_1||E_2| \cdots |E_m||A| = |R| = 0.$$

Como os determinantes das matrizes elementares são diferentes de zero, tem-se finalmente que $|A| = 0$. $\square$

Obtivémos assim uma condição necessária e suficiente de invertibilidade duma matriz expressa em termos do determinante que pode ser agora acrescentada ao Teorema 3 (a segunda versão de quatro versões).

Condicões necessárias e suficientes de invertibilidade (II)

Teorema 3. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) A é invertível.

ii) car $A = n$.

iii) *A é um produto de matrizes elementares.*

iv) *A pode ser transformada na matriz identidade à custa de operações elementares.*

v) *A forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade.*

vi) *O sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ admite apenas a solução trivial.*

vii) *Dada uma matriz coluna $\mathbf{b}$ de tipo $n \times 1$, o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e determinado.*

viii) $|A| \neq 0$.

Proposição 13. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Então*

$$|AB| = |A||B|.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que A é invertível e que, portanto, existem matrizes elementares $E_1, \dots, E_m$ tais que $A = E_1 E_2 \cdots E_m$ (cf. Teorema 3). Então, aplicando a Proposição 12, tem-se

$$\begin{aligned}
|AB| &= |E_1 E_2 \cdots E_m B| \\
&= |E_1||E_2 \cdots E_m B| \\
&= |E_1||E_2| \cdots |E_m||B| \\
&= |E_1 E_2 \cdots E_m||B| \\
&= |A||B|.
\end{aligned}$$

Se A não for invertível, então a forma reduzida de escada de linhas R da matriz A tem uma linha nula (cf. Teorema 3). Existem assim matrizes elementares $E_1, \dots, E_r$ tais que

$$|E_1 E_2 \cdots E_r AB| = |RB| = 0,$$

uma vez que a matriz RB tem uma linha nula (cf. Proposição 11 ii)). Aplicando agora a Proposição 12,

$$|E_1 E_2 \cdots E_r AB| = \underbrace{|E_1||E_2| \cdots |E_r|}_{\neq 0} |AB| = 0.$$

Atendendo a que $|A| = 0$ (cf. Teorema 3), conclui-se que

$$0 = |AB| = |A||B|.$$

□

Corolário 1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n invertível. Então*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}\,.$$

Demonstração. Usando a Proposição 13,

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|,$$

donde se conclui que

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| \iff |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}\,.$$

□

Lema 2. *Seja E uma matriz elementar de ordem n. Então $|E^T| = |E|$.*

Demonstração. Se E for uma matriz elementar P_{ij} oue $D_i(\alpha)$, como estas matrizes são simétricas, o resultado é imediato. Quanto às matrizes $E_{ij}(\alpha)$, tem-se

$$E_{ij}(\alpha)^T = E_{ji}(\alpha)$$

e, portanto,

$$|E_{ij}(\alpha)^T| = |E_{ji}(\alpha)| = 1 = |E_{ij}(\alpha)|.$$

□

Proposição 14. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então*

$$|A^T| = |A|.$$

Demonstração. Se A for invertível, então existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_m$ tais que $A = E_1E_2 \cdots E_m$ (cf. Teorema 3). Então, aplicando a Proposição 13 e o Lema 2, tem-se

$$\begin{aligned}
|A^T| &= |(E_1E_2 \cdots E_m)^T| \\
&= |E_m^T \cdots E_2^T E_1^T| \\
&= |E_m^T| \cdots |E_2^T||E_1^T| \\
&= |E_m| \cdots |E_2||E_1| \\
&= |E_1||E_2| \cdots |E_m| \\
&= |E_1E_2 \cdots E_m| \\
&= |A|.
\end{aligned}$$

No caso em que A não é invertível, a matriz A^T também não é invertível (cf. Proposição 3 i) e Proposição 7 v)). Assim, aplicando o Teorema 3 viii), tem-se

$$|A^T| = 0 = |A|.$$

□

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n diz-se uma **matriz triangular inferior** se, quaisquer que sejam $i, j = 1, \ldots, n$ com $i < j$, se tem $a_{ij} = 0$. Ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Atendendo a que uma matriz triangular inferior é a matriz transposta duma matriz triangular superior, obtemos a seguinte consequência da alínea iii) desta proposição:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular inferior A. Então

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

A igualdade entre o determinante duma matriz e o determinante da sua matriz transposta permite ainda uma versão "em termos de colunas" das propriedades do determinante (compare com a Proposição 11).

Proposição 15.

i) Uma matriz com duas colunas iguais tem determinante nulo.

ii) O determinante de uma matriz com uma coluna nula é igual a 0.

Fórmula de Laplace

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n e $i, k = 1, \ldots, n$, definem-se:

Submatriz A_{ik}: matriz quadrada de ordem $n-1$ que se obtém a partir de A retirando a linha i e a coluna k.

Menor-(ik):

$$M_{ik} = \det A_{ik}$$

Cofator-(ik):

$$C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Dada uma matriz quadrada A de ordem n e fixando uma qualquer linha i de A, pode-se demonstrar que o determinante de A se obtém de acordo com a fórmula seguinte:

Fórmula de Laplace com expansão na linha i

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

Exemplo

Calculemos o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

usando a fórmula de Laplace com expansão na linha 3. De acordo com a fórmula, tem-se:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= 1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 3(1 \times (-1) - 2 \times 3) + 0 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Também existe uma fórmula para o cálculo do determinante duma matriz A de ordem n expressa em termos de colunas. Dada uma qualquer coluna k de A, tem-se:

Fórmula de Laplace com expansão na coluna k

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}C_{ik}$$

N.B.- Dada uma matriz quadrada A, relembre que $|A| = |A^T|$. Se aplicar a fórmula de Laplace com expansão na linha j de A^T, vai obter a fórmula de Laplace com expansão na coluna j de A.

Exemplo

Calculemos agora o determinante da matriz do exemplo anterior usando a fórmula de Laplace com expansão na coluna 2.

$$\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\
&= 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 0 - 3 \times (1 \times (-1) - 2 \times 3) \\
&= 21
\end{aligned}$$

Os exemplos anteriores mostram que a escolha da linha ou da coluna é importante quando se calcula o determinante usando a fórmula de Laplace: a escolha justa da expansão pode permitir uma simplificação dos cálculos.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A **matriz dos cofatores** de A é a matriz definida por

$$\operatorname{cof} A = [C_{ik}]_{i,k=1,\dots,n}$$

e a **matriz adjunta** de A é a matriz definida por

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T \quad .$$

Lema 3. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então*

$$A \operatorname{adj} A = (\det A)I = (\operatorname{adj} A)A \quad .$$

Proposição 16. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se $\det A \neq 0$, então*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \quad .$$

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ e $\det A \neq 0$. De acordo com a proposição anterior, temos

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} .$$

9

Espaços vetoriais

$\mathbb{R}^n$ e os espaços vetoriais reais

Um conjunto V, com $V \neq \emptyset$, munido com as operações de adição $(+)$ e multiplicação por escalares (mpe)

adição
$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &\mapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

multiplicação por escalares
$$\begin{aligned} mpe : \mathbb{R} \times V &\to V \\ (\alpha, \boldsymbol{u}) &\mapsto \alpha \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

satisfazendo as propriedades abaixo diz-se um **espaço vetorial real** ou um **espaço linear real**.

Propriedades da adição e da multiplicação por escalares

Quaisquer que sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se:

(i) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(ii) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

(iii) Existe um **elemento neutro** $\mathbf{0}$, i.e., qualquer que seja $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u}$$

(iv) Todo o elemento $\boldsymbol{u} \in V$ admite um **elemento simétrico** $-\boldsymbol{u} \in V$, i.e.,

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}$$

(v) $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$

(vi) $(\alpha\beta)\boldsymbol{u} = \alpha(\beta\boldsymbol{u})$

(vii) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{u}$

(viii) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Os elementos dum espaço vetorial V designam-se por **vetores** ou **pontos**.

Exemplos de espaços vetoriais reais

1. Consideremos o conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,:\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

das sequências de n números reais. Usaremos a notação seguinte para representar um elemento $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$:

$$\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad \text{ou ainda} \qquad [\boldsymbol{u}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Quaisquer que sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definam-se as operações de adição e de multiplicação por escalares do seguinte modo:

Adição

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalares

$$\alpha\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$

Quando munido com as operações de adição e de multiplicação por escalares definidas acima, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real.

2. A solução geral do SEL homogéneo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

é o espaço vetorial S= $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = x_2\}$. ($S$ está contido no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.)

Fica como exercício verificar que os pontos seguintes também são exemplos de espaços vetoriais.

3. Seja A um matriz $k \times n$. A solução geral do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um espaço vetorial contido em $\mathbb{R}^n$.

4. O conjunto $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais de tipo $k \times n$ com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de matrizes por escalares é um espaço vetorial real.

5. O conjunto $\mathbb{P}_n$ dos polinómios reais de grau menor ou igual a n com as operações usuais de adição e multiplicação por escalares é um espaço vetorial real.

6. O conjunto $\mathbb{P}$ dos polinómios reais com as operações usuais de adição e multiplicação por escalares é um espaço vetorial real.

7. O conjunto $C([a, b])$ das funções reais contínuas num intervalo $[a, b]$, sendo $a < b$, com as operações usuais de adição de funções e de multiplicação de funções por escalares é um espaço vetorial real.

Seja V um espaço vetorial real. Diz-se que $S \subseteq V$, com $S \neq \emptyset$, é um **subespaço vetorial** ou **subespaço linear** de V se S, com as operações induzidas pelas operações definidas em V, é um espaço vetorial. Equivalentemente, $S \subseteq V$, com $S \neq \emptyset$, é um subespaço vetorial de V se for **fechado** para as operações $+$ e mpe.

Exemplos de subespaços de $\mathbb{R}^2$

a) $\{(0,0)\}$ b) reta que contenha $\{(0,0)\}$ c) $\mathbb{R}^2$

Será possível encontrar um ponto $(a,b) \neq (0,0)$ tal que o conjunto $\{(a,b)\}$ seja um subespaço de $\mathbb{R}^2$? O que acontece se se multiplicar (a,b) pelo escalar 0?

Proposição 17. *Seja S um subespaço dum espaço vetorial V. Então o vetor nulo $\mathbf{0}$ pertence a S.*

Demonstração. Seja $\boldsymbol{u}$ um vetor de S (note-se que $S \neq \emptyset$). Sendo S um subespaço, tem-se que $0\boldsymbol{u} \in S$, i.e., $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \in S$.[4] □

Uma consequência da Proposição 17 é que qualquer conjunto que não contenha $\{\mathbf{0}\}$ não pode ser um subespaço. Por exemplo, vê-se imediatamente que a reta de equação $y = 2$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ (porque não contém $\{(0,0)\}$).

Veremos adiante que não existem outros subespaços de $\mathbb{R}^2$ para além dos subespaços mencionados acima.

Combinação linear e expansão linear

Sejam $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vetores dum espaço vetorial V. Uma **combinação linear** dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ é qualquer vetor que se possa exprimir na forma

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{u}_k,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ são escalares.

A **expansão linear** $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$ do conjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ é o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, i.e.,

$$\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}) = \{\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{u}_k \colon\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

[4] Note que, qualquer que seja o vetor $\boldsymbol{u}$ de um espaço vetorial V, se tem

$$\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u} = (1+0)\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u}.$$

Somando o vetor $-\boldsymbol{u}$ a ambos os membros da igualdade $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + 0\boldsymbol{u}$, resulta que $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Proposição 18. *Sejam $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vetores dum espaço vetorial V. O conjunto $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$ é um subespaço linear de V.*

Demonstração. Devemos mostrar que $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$ é um conjunto não vazio fechado para a adição de vetores e para a multiplicação de vetores por escalares. Sendo óbvio que $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}) \neq \emptyset$, começaremos por mostrar que $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$ é fechado para a adição de vetores.

Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ vetores de $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$, i.e, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ tais que

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k,$$

e

$$\boldsymbol{v} = \beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_k \boldsymbol{u}_k.$$

Assim, usando as propriedades das operações + e *mpe*,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k) + (\beta_1 \boldsymbol{u}_1 + \beta_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_k \boldsymbol{u}_k) \\ &= \underbrace{(\alpha_1 + \beta_1)}_{\gamma_1} \boldsymbol{u}_1 + \underbrace{(\alpha_2 + \beta_2)}_{\gamma_2} \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \underbrace{(\alpha_k + \beta_k)}_{\gamma_k} \boldsymbol{u}_k. \end{aligned}$$

Tem-se então que existem escalares $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ tais que

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \gamma_1 \boldsymbol{u}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \gamma_k \boldsymbol{u}_k,$$

donde $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ pertence à expansão linear $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$. Por outras palavras, $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$ é um conjunto fechado para a adição de vetores.

Seja agora α um escalar e seja $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k$ um vetor de $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$. Então, usando mais uma vez as propriedades das operações + e *mpe*,

$$\begin{aligned} \alpha \boldsymbol{u} &= \alpha(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k) \\ &= \alpha(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1) + \alpha(\alpha_2 \boldsymbol{u}_2) + \cdots + \alpha(\alpha_k \boldsymbol{u}_k) \\ &= (\alpha\alpha_1)\boldsymbol{u}_1 + (\alpha\alpha_2)\boldsymbol{u}_2 + \cdots + (\alpha\alpha_k)\boldsymbol{u}_k. \end{aligned}$$

Ou seja, $\alpha \boldsymbol{u}$ é uma combinação linear dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$, donde $\alpha \boldsymbol{u} \in \mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$, como se pretendia demonstrar. □

Exercício.

Determine a expansão linear dos conjuntos seguintes:

a) $\{(1,0),(0,1)\}$;

b) $\{(1,1),(-1,0)\}$;

c) $\{(1,1),(-1,0),(2,3)\}$.

Solução.

Todos os conjuntos geram $\mathbb{R}^2$. Por exemplo na alínea b), dado um qualquer vetor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, devemos ver que o vetor é combinação linear dos vetores $(1,1),(-1,0)$. Ou seja, devem existir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A esta igualdade corresponde o SEL cuja matriz aumentada é

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & a \\ 1 & 0 & | & b \end{bmatrix},$$

tendo-se

$$\operatorname{car}[A|b] = \operatorname{car} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & a \\ 1 & 0 & | & b \end{bmatrix} = \operatorname{car} A \qquad \leftarrow \text{ SEL possível (e determinado)}$$

No caso da alínea c), obteremos um SEL correspondente que é possível mas já não é determinado.

Também se pode designar $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\})$ por **subespaço gerado por** $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$.

Diz-se que um conjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ contido num espaço vetorial V é um **conjunto gerador** de V, ou que **gera** V, se

$$V = \mathcal{L}(\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}).$$

Exemplos.

a) $\{(1,0),(0,1)\}$ gera $\mathbb{R}^2$

b) $\{(1,1),(-1,0)\}$ gera $\mathbb{R}^2$

c) A reta de equação $y=-x$ é gerada por...

d) O plano de equação $y=x$ é gerado por ...

Algumas questões *informais*:

Seja V um espaço vetorial.

- Pode haver mais que um conjunto gerador de V?
- Há sempre um conjunto gerador de V?
- Qual o <u>número mínimo</u> de vetores necessários para gerar V?

(Verifique o que acontece nos exemplos anteriores.)

Independência linear

Diz-se que um conjunto $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k\}$ contido num espaço vetorial V é um **conjunto linearmente independente**, ou que os vetores $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k$ são **linearmente independentes**, se:

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{u}_k=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$$

Exercício.

Os vetores $(1,0,1),(0,-1,1),(1,1,1)$ são linearmente independentes?

Solução.

Os vetores são linearmente independentes se e só se a igualdade

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

for verdadeira apenas no caso de se ter $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Ou seja, se e só se o sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

tiver como única solução o vetor nulo, i.e., se e só se o SEL for possível e determinado. Para que tal se verifique,

$$\operatorname{car}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)$$

tem que ser 3, o que de facto acontece. Podemos então concluir que os vetores são linearmente independentes.

A proposição seguinte generaliza este exemplo.

Proposição 19. *Sejam $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ são linearmente independentes sse*

$$\operatorname{car}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & | & \mathbf{u}_2 & | & \ldots & | & \mathbf{u}_k\end{bmatrix} = k.$$

Demonstração. Sejam

$$A = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & | & \mathbf{u}_2 & | & \ldots & | & \mathbf{u}_k\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_k\end{bmatrix}.$$

Os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ são linearmente independentes se e só se a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem a solução nula como única solução ou, por outras palavras, se e só se o SEL homogéneo correspondente é possível e determinado. Consequentemente, os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ são linearmente independentes se e só se

$$\operatorname{car}\left[\mathbf{u}_1 \quad | \quad \mathbf{u}_2 \quad | \quad \dots \quad | \quad \mathbf{u}_k\right] = k.$$

□

Esta proposição permite concluir que, se $n \geq k$, os vetores podem ser linearmente independentes porque é possível que haja um pivô em cada coluna, quando se reduzir a matriz A a uma matriz em escada de linhas. Se $n < k$, os vetores não são linearmente independentes porque não há linhas em número suficiente para que possa haver um pivô em cada coluna.

Um conjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ contido num espaço vetorial V é um **conjunto linearmente dependente**, ou os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ são **linearmente dependentes**, se não são linearmente independentes.

Em resumo, para vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ de $\mathbb{R}^n$ temos que:

- Se $n \geq k$, os vetores podem ser linearmente independentes.
- Se $n < k$, os vetores são linearmente dependentes.

Teorema 4. *Sejam V um espaço vetorial e $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ vetores de V. Os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ são linearmente dependentes se e só se algum deles se puder exprimir como uma combinação linear dos restantes.*

Demonstração. Começaremos por mostrar que, se algum dos vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ se puder exprimir como uma combinação linear dos restantes, então $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ são linearmente dependentes.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que existem escalares $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ tais que $\boldsymbol{u}_1$ é uma combinação linear dos restantes vetores, i.e.,

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k.$$

Então

$$\underbrace{(-1)}_{\neq 0} \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0},$$

o que mostra que os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k$ são linearmente dependentes.

Reciprocamente, suponhamos agora que os vetores $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ são linearmente dependentes, i.e., existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, não sendo todos nulos, tais que

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha_1 \neq 0$. Então, resulta de (2) que

$$\boldsymbol{u}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{u}_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{u}_k.$$

Assim, $\boldsymbol{u}_1$ é uma combinação linear dos restantes vetores, o que conclui a demonstração. □

Bases e coordenadas

1º- Definição de base

Uma **base** de um espaço vetorial V é um (qualquer) conjunto linearmente independente que gere V.

Exemplo

a) $\mathcal{E}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ $\quad\leftarrow$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

b) Uma outra base de $\mathbb{R}^2$ é $\mathcal{B}_1 = \ldots$

c) Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Represente o vetor $(2,3)$ como uma combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$.

Solução. c) Pretende-se determinar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

Ter-se-á então que resolver o sistema cuja matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 0 & 3\end{bmatrix},$$

obtendo-se $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 1$.

O conjunto $\mathcal{E}_n = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, dita a **base canónica** de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5. *Seja $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}\}$ uma base de um espaço vetorial V. Então todo o vetor de V se exprime de forma única como uma combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Seja $\boldsymbol{u} \in V$ e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ escalares tais que

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k,$$

e

$$\boldsymbol{u} = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_k \boldsymbol{b}_k.$$

Subtraindo os membros correspondentes das duas igualdades acima, tem-se

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k - (\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_k \boldsymbol{b}_k).$$

Assim, recorrendo às propriedades das operações $+$ e *mpe*,

$$(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\boldsymbol{b}_k = \mathbf{0}.$$

Como o conjunto $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}\}$ é uma base de V, os vetores $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}$ são linearmente independentes e, portanto,

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_k - \beta_k = 0,$$

i.e.,

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_k = \beta_k,$$

como se pretendia. □

Seja $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k})$ uma **base ordenada** dum espaço vetorial V e seja

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \alpha_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b_k}$$

um elemento de V. O **vetor das coordenadas** de $\boldsymbol{x}$ na base $\mathcal{B}$ é o vetor $\boldsymbol{u}_{\mathcal{B}}$ (ou $(\boldsymbol{u})_{\mathcal{B}}$) de $\mathbb{R}^k$ definido por

$$\boldsymbol{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k).$$

Se se representar o vetor das coordenadas de $\boldsymbol{u}$ como vetor coluna, usaremos nesse caso a notação

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad [\boldsymbol{u}_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}.$$

Exemplo. Os vetores das coordenadas de $(2,3)$ na base $\mathcal{B} = ((1,1),(-1,0))$ e na base canónica $\mathcal{E}_2 = ((1,0),(0,1))$ são, respetivamente, $(2,3)_{\mathcal{B}} = (3,1)$ e $(2,3)_{\mathcal{E}_2} = (2,3)$. (Compare com c) do exemplo anterior.)

Exemplo. Determine uma base para a expansão linear S do conjunto

$$\{(1,1,0),(0,0,1)\}.$$

Obtenha uma equação vetorial e equações paramétricas e cartesianas de S.

Recorrendo à Proposição 19, sabemos que os vetores são linearmente independentes se e só se

$$\operatorname{car}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 2.$$

Como de facto a característica da matriz é 2, podemos concluir que os vetores são linearmente independentes. Isto é, o conjunto $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de S.

Assim, os vetores (x,y,z) de S são uma combinação linear dos vetores da base de S. Por outras palavras, os vetores (x,y,z) de S satisfazem a **equação vetorial** de S

$$(x,y,z) = t(1,1,0) + s(0,0,1), \tag{3}$$

onde $t, s \in \mathbb{R}$.

As **equações paramétricas** de S deduzem-se imediatamente a partir de (3):

$$\begin{cases} x = t\\ y = t\\ z = s\end{cases}$$

onde t, s são parâmetros reais.

Equações cartesianas podem ser obtidas da forma seguinte. Designemos por (x,y,z) um elemento arbitrário de S. Este vetor é uma combinação linear dos vetores da base de S e, portanto, o conjunto

$$\{(1,1,0),(0,0,1),(x,y,z)\}$$

é linearmente dependente. Isto é, $(x,y,z) \in S$ se e só se a matriz

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 0 & y\\ 0 & 1 & z\end{bmatrix}$$

tiver característica menor que 3. (Conclui-se assim que a característica de A tem que ser 2.) Atendendo a este facto, reduzamos a matriz A a uma matriz em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 - L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & -x+y \\ 0 & 1 & z \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & -x+y \end{bmatrix}$$

Obtemos deste modo a equação $x = y$ para o plano S. Neste exemplo muito simples, esta equação poderia ser obtida simplesmente "olhando" para o conjunto $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. No entanto, pretende-se com esta resolução ilustrar um método geral.

Proposição 20. *Seja* $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k})$ *uma base ordenada de um espaço vetorial* V*. Quaisquer que sejam os vetores* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *e o escalar* α*, tem-se*

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{u}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{v}_{\mathcal{B}} \qquad (\alpha \boldsymbol{u})_{\mathcal{B}} = \alpha \boldsymbol{u}_{\mathcal{B}}. \tag{4}$$

Além disso, a função $T\colon V \to \mathbb{R}^k$*, definida por* $T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\mathcal{B}}$*, é bijetiva.*

Demonstração. Fica como exercício mostrar (4).

A função T é sobrejetiva porque, dado um vetor $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, o vetor $\boldsymbol{u} \in V$ definido por $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k$ é tal que

$$T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k).$$

Suponhamos agora que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ são vetores tais que $T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v})$. Então, usando (4), tem-se

$$T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}) \Leftrightarrow T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^k} \Leftrightarrow T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}).$$

Tem-se, portanto, que

$$T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})_{\mathcal{B}} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}),$$

donde se deduz que

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{b}_1 + 0\boldsymbol{b}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{0}_V.$$

Concluimos assim que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Mostrámos pois que

$$T(\boldsymbol{u}) = T(\boldsymbol{v}) \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v},$$

ou seja, que a função T é injetiva. $\square$

N.B.- Dada uma base ordenada $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k})$ dum espaço vetorial V, definimos a função

$$\begin{aligned} T\colon V &\to \mathbb{R}^k \\ \boldsymbol{u} &\mapsto \boldsymbol{u}_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

que a cada vetor $\boldsymbol{u} \in V$ faz corresponder o vetor $\boldsymbol{u}_{\mathcal{B}}$ das suas coordenadas na base $\mathcal{B}$. De acordo com a Proposição 20, a função T "transforma somas em somas" e "transforma a multiplicação por escalares em multiplicação por escalares".

(Funções com estas duas propriedades designam-se por transformações lineares e serão estudadas na Secção 8.)

Proposição 21. *Seja $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_k)$ uma base ordenada de um espaço vetorial V e sejam $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ vetores de V. Os vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$ são linearmente independentes se e só se os vetores $(\boldsymbol{u}_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (\boldsymbol{u}_p)_{\mathcal{B}}$ são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^k$.*

Demonstração. Atendendo a que a função $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u}_{\mathcal{B}}$ é bijetiva (cf. Proposição 20),

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p = \boldsymbol{0}_V \tag{5}$$

se e só se

$$(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_p \boldsymbol{u}_p)_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^k} \ .$$

Usando a Proposição 20, tem-se

$$\alpha_1 (\boldsymbol{u}_1)_{\mathcal{B}} + \cdots + \alpha_p (\boldsymbol{u}_p)_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^k} \ . \tag{6}$$

Resulta então que a equação (5) tem uma única solução (i.e., $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$) se e só se o mesmo se passa com a equação (6). Deste modo, os vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p \in V$ são linearmente independentes se e só se os vetores $(\boldsymbol{u}_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (\boldsymbol{u}_p)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^k$ são linearmente independentes. $\square$

Bases e dimensão

2º Existência de bases

Os dois teoremas seguintes, apresentados sem demonstração, permitem decidir quanto à existência e cardinalidade de bases de um qualquer espaço vetorial.

Teorema 6. *Todo o espaço vetorial que tem um conjunto gerador possui uma base.*

N.B.- Aqui convenciona-se que o conjunto vazio $\emptyset$ gera o espaço nulo $V = \{\mathbf{0}\}$.

Teorema 7. *Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases de um espaço vetorial V. Então $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ têm a mesma cardinalidade.*

A **dimensão** de um espaço vetorial V, que designaremos por $\dim V$, é a cardinalidade duma (qualquer) base de V.

Exemplo. Atendendo ao número de elementos da base canónica do espaço $\mathbb{R}^n$, tem-se que $\dim \mathbb{R}^n = n$.

3º Construção de bases

Seja V um espaço vetorial. Agora que sabemos que existe sempre uma base de V (e, portanto, uma infinidade de bases, se $V \neq \{\mathbf{0}\}$), o Teorema 8 esclarece como obter uma base a partir de subconjuntos de vetores de V.

Começaremos por demonstrar o lema seguinte.

Lema 4. *Seja $X = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_k}\}$ um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^k$. Então X é uma base de $\mathbb{R}^k$.*

Demonstração. Basta provar que X é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^k$, i.e, mostrar que, qualquer que seja $\boldsymbol{v} = (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbb{R}^k$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u_1} + \alpha_2 \boldsymbol{u_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u_k}.$$

Mas o SEL

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & | & \mathbf{u_2} & | & \cdots & | & \mathbf{u_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix},$$

é possível (e determinado) porque $\mathrm{car}(\begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & | & \mathbf{u_2} & | & \cdots & | & \mathbf{u_k} \end{bmatrix}) = k$ (compare com a Proposição 19). Acabámos de mostrar que, qualquer que seja $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^k$, este vetor é uma combinação linear de $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_k}$, i.e., X é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^k$. $\square$

Subespaços de $\mathbb{R}^2$. Sendo $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, sabemos que qualquer subconjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^2$ tem, no máximo, dois vetores. Assim, dado um qualquer subespaço S de $\mathbb{R}^2$, a sua base pode ter zero vetores, um vetor ou dois vetores, sendo S, respetivamente, $\{(0,0)\}$, uma reta que contém o ponto $(0,0)$, ou $\mathbb{R}^2$.

Teorema 8. *Seja V um espaço vetorial de dimensão k.*

(i) Quaisquer k vetores linearmente independentes geram V (i.e., formam uma base de V).

(ii) Qualquer subconjunto de V com m vetores, com $m > k$, é linearmente dependente.

(iii) Qualquer subconjunto de V linearmente independente com p vetores, onde $p < k$, está contido numa base de V.

(iv) Qualquer subconjunto de V que gere V contém uma base de V.

Numa linguagem informal, podemos dizer que se afirma em (iii) que qualquer subconjunto linearmente independente de V pode ser acrescentado de modo a se obter uma base. Por outro lado, em (iv) garante-se que qualquer subconjunto que gere V pode ser "diminuido" de modo a se ter uma base.

Demonstração. O teorema é trivialmente verdadeiro quando $k = 0$. Suponhamos então que $k \neq 0$ e que $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k})$ é uma base de V.
(i) Seja $X = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_k}\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de V. A Proposição 21 garante que $\{(\boldsymbol{u_1})_\mathcal{B}, (\boldsymbol{u_2})_\mathcal{B}, \cdots, (\boldsymbol{u_k})_\mathcal{B}\}$ é um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^k$. Sendo assim, usando o Lema 4, vemos que o conjunto

$$\{(\boldsymbol{u_1})_\mathcal{B}, (\boldsymbol{u_2})_\mathcal{B}, \cdots, (\boldsymbol{u_k})_\mathcal{B}\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^k$.

Seja $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b}_k$ um vetor de V. Pretendemos mostrar que $\boldsymbol{v}$ pertence à expansão linear de X. Então, uma vez que $((\boldsymbol{u_1})_\mathcal{B}, (\boldsymbol{u_2})_\mathcal{B}, \cdots, (\boldsymbol{u_k})_\mathcal{B})$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^k$, o vetor $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ é uma combinação linear dos vetores $(\boldsymbol{u_1})_\mathcal{B}, (\boldsymbol{u_2})_\mathcal{B}, \cdots, (\boldsymbol{u_k})_\mathcal{B}$. Ou seja,

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{B} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \beta_1 (\boldsymbol{u_1})_\mathcal{B} + \beta_2 (\boldsymbol{u_2})_\mathcal{B} + \cdots + \beta_k (\boldsymbol{u_k})_\mathcal{B}.$$

Assim, usando a Proposição 20,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}} &= \beta_1(\boldsymbol{u_1})_{\mathcal{B}} + \beta_2(\boldsymbol{u_2})_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_k(\boldsymbol{u_k})_{\mathcal{B}} \\ &= (\beta_1\boldsymbol{u_1} + \beta_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + \beta_k\boldsymbol{u_k})_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

Usando novamente a Proposição 20, temos então que

$$\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{u_1} + \beta_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + \beta_k\boldsymbol{u_k},$$

como se pretendia.

(ii) Seja $X = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_m}\}$ um subconjunto de V e suponhamos que X é linearmente independente. Então o conjunto $X_k = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \cdots, \boldsymbol{u_k}\}$ também é linearmente independente [5].

A afirmação (i) do teorema, garante que X_k é uma base de V, donde todos os vetores $\boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u_m}$ pertencem à expansão linear da base X_k. Consequentemente, o Teorema 4 garante agora que o conjunto X é linearmente dependente, o que contradiz a hipótese inicial de ser X linearmente independente. Está assim provado que o conjunto X não pode ser linearmente independente, i.e., X tem que ser linearmente dependente.

(iii) ...

(iv) ... $\square$

Exemplo de aplicação de Teorema 8 (iv). Determine uma base do subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado por

$$X = \{(1,2,6), (1,1,1), (2,3,7), (0,1,5)\}.$$

Os vetores $(1,2,6), (1,1,1), (2,3,7), (0,1,5)$ são linearmente dependentes porque, sendo a dimensão de $\mathbb{R}^3$ igual a 3, um conjunto com quatro vetores não pode ser linearmente independente (cf. Teorema 8 (ii)). (Note que se os vetores fossem linearmente independentes, a dimensão de $\mathbb{R}^3$ teria que ser maior ou igual a 4, o que é impossível.)

Atendendo a que estes vetores geram S, o Teorema 8 (iv) garante que o conjunto $\{(1,2,6), (1,1,1), (2,3,7), (0,1,5)\}$ contém uma base de S.

Há então que determinar um subconjunto linearmente independente "máximo", no sentido em que não está estritamente contido noutro conjunto linearmente independente contido em X.

[5] Note que qualquer subconjunto de um conjunto linearmente independente também é linearmente independente.

Tendo a Proposição 19 em mente, reduzamos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

a escada de linhas. Temos então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notando que os pivôs (a amarelo) estão situados na primeira e na segunda colunas, a Proposição 19 assegura que os vetores $(1, 2, 6), (1, 1, 1)$ são linearmente independentes.

Por outro lado, usando a matriz em escada de linhas acima, sabemos que o sistema homogéneo associado à matriz (7) tem duas variáveis independentes. Denotando os elementos do conjunto das soluções deste sistema por $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, resulta que as variáveis independentes são γ e δ.

Se, por exemplo, se fizer $\gamma = 1$ e $\delta = 0$, temos que existem $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1(1, 2, 6) + \beta_1(1, 1, 1) + (2, 3, 7) + 0(0, 1, 5) = 0.$$

Então

$$\alpha_1(1, 2, 6) + \beta_1(1, 1, 1) + (2, 3, 7) = 0,$$

o que mostra ser $(2, 3, 7)$ uma combinação linear de $(1, 2, 6), (1, 1, 1)$.

Analogamente se mostraria que $(0, 1, 5)$ é uma combinação linear de $(1, 2, 6), (1, 1, 1)$, bastando para isso fazer $\gamma = 0$ e $\delta = 1$.

Concluimos assim que o conjunto $\{(1, 2, 6), (1, 1, 1)\}$ é uma base de S.

N.B.- Resulta da resolução acima que uma equação vetorial para S é

$$(x, y, z) = t(1, 2, 6) + s(1, 1, 1),$$

com $t, s \in \mathbb{R}$, e que equações paramétricas de S são

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = 2t + s \\ z = 6t + s, \end{cases}$$

com $t, s \in \mathbb{R}$.

Exemplo de aplicação de Teorema 8 (iii). Verifique que é possível obter uma base de $\mathbb{R}^4$ a partir do conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, onde

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, -2, 2) \qquad \boldsymbol{v}_2 = (-3, 5, 5, -6) \qquad \boldsymbol{v}_3 = (1, -1, 0, 2).$$

Comecemos por reduzir a matriz $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & | & \mathbf{v}_2 & | & \mathbf{v}_3\end{bmatrix}$ a escada de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Usando a Proposição 19, concluimos que os vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ são linearmente independentes. O Teorema 8 (iii) garante que é possível acrescentar vetores a este conjunto de modo a construir uma base de $\mathbb{R}^4$.

Atendendo ao posicionamento dos pivôs a amarelo, vemos que se, por exemplo, acrescentarmos o vetor $\boldsymbol{e}_4$ da base canónica de $\mathbb{R}^4$ ao conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$, obteremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

que terá necessariamente característica 4. (Note que, na aplicação anterior do MEG, todas as operações mantêm a quarta coluna desta nova matriz inalterada.)

Recorrendo agora à Proposição 19 e ao Teorema 8 (i), vemos imediatamente que o conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Bases em espaços de matrizes e de polinómios

O espaço $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$

A **base ordenada canónica** no espaço $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$ das matrizes reais $k \times n$ é o conjunto ordenado constituido por matrizes com todas as entradas nulas exceto uma com o valor 1; a ordenação é feita de modo que a entrada não nula é a entrada-(11) no caso da 1ª matriz, e vai "percorrendo as linhas" da esquerda para a direita.

Por exemplo, no caso do espaço $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2, a base canónica é $\mathcal{B} = (\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right])$. A dimensão deste espaço é portanto $\dim \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim é claro que qualquer matriz A é uma combinação linear dos vetores (i.e., das matrizes) de $\mathcal{B}$. Também é fácil ver que $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente. De facto,

$$\alpha_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, o que mostra ser $\mathcal{B}$ linearmente independente.

Concluimos pois que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e que , dada uma matriz A como acima, o vetor $A_{\mathcal{B}}$ das coordenadas de A na base $\mathcal{B}$ é $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$ que pertence a $\mathbb{R}^4$. Tem-se então que qualquer matriz $A = \left[\begin{smallmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{smallmatrix}\right]$ tem uma imagem em $\mathbb{R}^4$ de acordo com

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^4 \\ A &\mapsto A_{\mathcal{B}} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \end{aligned}$$

A Proposição 20 garante que T é bijetiva.

Exemplo. Determine uma base $\mathcal{B}'$ para o subespaço S de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

e calcule o vetor das coordenadas $A_{\mathcal{B}'}$ da matriz A na base $\mathcal{B}'$.

Um conjunto de matrizes é linearmente independente se e só se os seus vetores das coordenadas na base canónica são linearmente independentes (cf. Proposição 21). Verifiquemos se os vetores

$$A_{\mathcal{B}} = (1,1,1,1) \qquad B_{\mathcal{B}} = (1,1,1,0) \qquad C_{\mathcal{B}} = (0,0,0,-5)$$

são linearmente independentes. Reduzamos então a matriz $[A_{\mathcal{B}}\, B_{\mathcal{B}}\, C_{\mathcal{B}}]$ a uma matriz em escada de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos assim que $A_{\mathcal{B}} = (1,1,1,1), B_{\mathcal{B}} = (1,1,1,0)$ são linearmente independentes enquanto que $C_{\mathcal{B}} = (0,0,0,-5)$ pertence à expansão linear $\mathcal{L}(\{A_{\mathcal{B}}, B_{\mathcal{B}}\})$. Consequentemente, uma base para S é $\mathcal{B}' = (A,B)$ e $\dim S = 2$.

O vetor das coordenadas $A_{\mathcal{B}'}$ é

$$A_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{B}'} = (1,0).$$

O espaço $\mathbb{P}_n$

Consideremos agora o espaço $\mathbb{P}_n$ dos polinómios de grau menor ou igual a n, e representemos genericamente um tal polinómio por

$$p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t + \cdots + a_{n-1} t + a_n t.$$

A **base canónica de** $\mathbb{P}_n$ é o conjunto ordenado $\mathcal{P}_n = (1, t, \ldots, t^n)$. Tal como no espaço das matrizes, cada polinómio $p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t + \cdots + a_{n-1} t + a_n t$ tem uma imagem em $\mathbb{R}^n$ constituida pelo vetor $(a_o, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ das coordenadas de $p(t)$ na base $\mathcal{P}_n$. A dimensão deste espaço é $\dim \mathbb{P}_n = n+1$.

Exemplo. Determine uma base para o subespaço S de $\mathbb{P}_3$ gerado por $X = \{1,\, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$.

De modo semelhante ao exemplo anterior, vamos usar os vetores das coordenadas dos polinómios na base $\mathcal{P}_3$. Obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que já está em escada de linhas e tem característa 4. Podemos pois concluir que o conjunto X é linearmente independente, sendo portanto uma base de S. Como $\dim S = \dim \mathbb{P}_3$, conclui-se que $S = \mathbb{P}_3$.

Soma e interseção de subespaços

Sejam U e W subespaços dum espaço vetorial V.
Define-se

$$U + W = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \colon \boldsymbol{x} \in U \wedge \boldsymbol{y} \in W\},$$

$$U \cap W = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in U \wedge \boldsymbol{x} \in W\}.$$

Proposição 22. *Sejam U e W subespaços dum espaço vetorial V. Então $U + W$ e $U \cap W$ são subespaços vetoriais de V.*

Demonstração. Seja α um escalar e seja $\boldsymbol{z} \in U + W$. Então existem $\boldsymbol{x} \in U$ e $\boldsymbol{y} \in W$ tais que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, e

$$\alpha\boldsymbol{z} = \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}.$$

Atendendo a que $\alpha\boldsymbol{x} \in U$ e $\alpha\boldsymbol{y} \in W$, tem-se que $\alpha\boldsymbol{z} \in U + W$. Assim, $U + W$ é fechado para a multiplicação por escalares.
Para ver que $U+W$ é fechado para a adição de vetores, sejam $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$ vetores de $U + W$. Então existem $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ e $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in W$ tais que $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2$. Tem-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2 &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 \\ &= (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) \end{aligned}$$

o que mostra ser $U + W$ fechado para a operação $(+)$.
Quanto a mostrar que $U \cap W$ é um subespaço, comecemos por analisar a multiplicação por escalares. Se $\boldsymbol{x} \in U \cap W$ então $\alpha\boldsymbol{x} \in U$ e $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ e, portanto, $U \cap W$ é fechado para a operação *mpe*.
Sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U \cap W$, então $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ e $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$. Assim, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U \cap W$, concluindo-se que $U \cap W$ é fechado para a adição de vetores. □

Teorema 9. *Sejam U e W subespaços dum espaço vetorial V. Então*

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

Subespaços associados a uma matriz

Sendo A uma matriz $k \times n$ definiremos em seguida três espaços lineares associados à matriz A: o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas da matriz A.

O **núcleo** $N(A)$ da matriz A é conjunto das soluções do sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Proposição 23. *Seja A uma matriz $k \times n$. O núcleo*

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Vejamos que $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se $x_1, x_2 \in N(A)$, tem-se

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

o que mostra que $N(A)$ é fechado para a adição de vetores.

Por outro lado se $\mathbf{x} \in N(A)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

o que mostra ser $N(A)$ fechado para a multiplicação de vetores por escalares. Assim, $N(A)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, como se pretendia provar. □

Exemplo (parte I). Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Para determinar o núcleo $N(A)$, teremos que resolver o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Reduzindo A a uma matriz em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é então

$$N(A) = \{(x, y, z, w)\mathbb{R}^4 \colon x = -3z - 3w, y = z + w\}.$$

Como, para todo o $(x, y, z, w) \in N(A)$, se tem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z - 3w \\ z + w \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z \\ z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3w \\ w \\ 0 \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tem-se que $N(A) = \mathcal{L}(\{(3, 1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1))\}$. Então uma base do núcleo $N(A)$ é $\{(3, 1, 1, 0), (-3, 1, 0, 1))\}$, uma vez que este conjunto é linearmente independente. Consequentemente, $\dim N(A) = 2$.

O **espaço das linhas** $L(A)$ da matriz A é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A. Considerando A descrita por linhas, i.e.,

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_k \end{bmatrix} \qquad (L_1, L_2, \dots, L_k \in \mathbb{R}^n) \ ,$$

tem-se

$$L(A) = \{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_k L_k : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$$

O **espaço das colunas** $C(A)$ da matriz A é o subespaço de $\mathbb{R}^k$ gerado pelas colunas de A. Considerando A descrita por colunas, i.e.,

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & | & C_2 & | & \cdots & | & C_n \end{bmatrix} \qquad (C_1, C_2, \dots, C_k \in \mathbb{R}^k) \ ,$$

tem-se

$$C(A) = \{\beta_1 C_1 + \beta_2 C_2 + \cdots + \beta_n C_n : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}\}$$

Proposição 24. *Seja A uma matriz de tipo $k \times n$ e seja B uma matriz que se obtém de A à custa duma operação elementar. O espaço das linhas de B é igual ao espaço das linhas de A.*

Demonstração. Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_k \end{bmatrix} \qquad (L_1, L_2, \dots, L_k \in \mathbb{R}^n)$$

O espaço das linhas $L(A)$ da matriz A é o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores $L_1, L_2, \ldots, L_k \in \mathbb{R}^n$, i.e.,

$$L(A) = \{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_k L_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

Se B se obtiver a partir de A trocando duas linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$), é óbvio que $L(A) = L(B)$.

Suponhamos que B se obteve a partir de A multiplicando a linha L_i pelo escalar $\alpha \neq 0$:

$$A \xrightarrow[\alpha L_i]{} B\ .$$

Uma combinação linear das linhas de B é um vetor da forma

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_i(\alpha L_i) + \cdots + \alpha_k L_k.$$

Donde se obtém

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_i(\alpha L_i) + \cdots + \alpha_k L_k = \tag{8}$$
$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + (\alpha_i \alpha) L_i + \cdots + \alpha_k L_k\ . \tag{9}$$

sendo agora claro que o vetor (9) é também uma combinação linear das linhas de A. Verificámos assim que $L(B) \subseteq L(A)$. Reciprocamente, consideremos um vetor arbitrário do espaço das linhas $L(A)$. Ou seja, consideremos uma combinação linear da forma

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_i L_i + \cdots + \alpha_k L_k\ .$$

Mas

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_i L_i + \cdots + \alpha_k L_k = \tag{10}$$
$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \frac{\alpha_i}{\alpha}(\alpha L_i) + \cdots + \alpha_k L_k\ . \tag{11}$$

o que mostra que $L(A) \subseteq L(B)$, já que o vetor (11) pertence a $L(B)$.

Finalmente, suponhamos que B se obteve a partir de A substituindo a linha L_i por $L_i + \alpha L_j$, onde $i \neq j$ e α é um escalar. Observando que

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_i(L_i + \alpha L_j) + \cdots + \alpha_j L_j + \cdots + \alpha_k L_k =$$
$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha L_i + \cdots + (\alpha + \alpha_j) L_j + \cdots + \alpha_k L_k$$

e usando um raciocínio análogo ao anterior, não é difícil concluir que $L(A) = L(B)$. $\square$

Proposição 25. *As linhas não nulas de uma matriz em escada de linhas são linearmente independentes.*

Demonstração. Seja R uma matriz $m \times n$ em escada de linhas que supomos descrita por linhas, i.e.,

$$R = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} \qquad\qquad (L_1, L_2, \ldots, L_m \in \mathbb{R}^n) \ ,$$

e consideremos a igualdade

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_k L_k = \mathbf{0} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ escalares}), \tag{12}$$

onde $k \leq m$ é o índice da última linha não nula de R. Se a_{1j} for a primeira entrada não nula de L_1, atendendo a que a matriz está em escada de linhas, tem-se que $a_{2j} = a_{3j} = \cdots = a_{kj} = 0$ (i.e, todas as entradas de R na coluna j são nulas). Consequentemente, para que a igualdade (12) se verifique é necessário que $\alpha_1 = 0$. Obtemos assim uma nova expressão

$$\alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_k L_k = \mathbf{0} \qquad (\alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ escalares}). \tag{13}$$

A submatriz formada apenas pelas linhas $L_2, \ldots, L_k$ também está em escada de linhas pelo que podemos aplicar novamente o racíocinio anterior, concluindo que $\alpha_2 = 0$. Repetindo este procedimento um número suficiente de vezes, concluiremos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

e que, portanto, as linhas de R são linearmente independentes. □

Exemplo (parte II). Voltemos a considerar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

e a sua redução a uma matriz em escada de linhas feita na parte (I) deste exemplo.

Recorrendo à Proposição 24, sabemos que o espaço das linhas de A e o espaço das linhas de qualquer matriz obtida a partir de A à custa de operações elementares coincidem. As considerações anteriores permitem concluir que o espaço das linhas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é o espaço $L(A)$. Atendendo a que, por outro lado, as linhas não nulas de uma matriz em escada de linhas são linearmente independentes (cf. Proposição 25), deduz-se que o conjunto $\{(1,1,2,2),(0,1,-1,-1)\}$ é uma base de $L(A)$.

O conjunto formado pelas colunas de A que correspondem a variáveis dependentes (i.e., colunas com pivôs) é linearmente independente. Note que, se considerar uma matriz A' obtida retirando as colunas a amarelo da matriz A, obtém uma matriz em escada de linhas. Assim, o SEL homogéno $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite apenas a solução nula. Atendendo a que $A'\mathbf{x}$ é uma combinação linear das colunas de A', é agora claro que as colunas de A' são linearmente independentes.

Por outro lado, se acrescentar ao conjunto formado pelas colunas de A' qualquer das colunas correspondentes às variáveis independentes (i.e., colunas a amarelo), o novo conjunto é linearmente dependente. Podemos agora concluir que uma base de $C(A)$ é $\{(1,1,2),(1,2,3)\}$.

Finalmente, tem-se que

$$\dim L(A) = \text{número de pivôs} = \operatorname{car}(A) = \dim C(A)$$

$$\begin{aligned} \dim N(A) &= \text{número de variáveis independentes} \\ &= \text{número de colunas} - \text{número de pivôs} \\ &= \text{número de colunas} - \operatorname{car}(A), \end{aligned}$$

donde

$$\dim N(A) + \dim L(A) = \text{número de colunas}.$$

Proposição 26. *Seja A uma matriz $k \times n$.*

(i) $\dim N(A) = n - \operatorname{car} A$.

(ii) $\dim L(A) = \operatorname{car} A$.

(iii) $\dim C(A) = \operatorname{car} A$.

O teorema seguinte é uma consequência imediata desta proposição.

Teorema 10. ***(Teorema das dimensões)***
Seja A uma matriz $k \times n$.

$$n = \dim N(A) + \dim L(A)$$

Note que:

$$\operatorname{car} A = \dim L(A)$$
$$\operatorname{car} A^T = \dim L(A^T) = \dim C(A) = \operatorname{car} A$$

Donde podemos concluir que

Corolário 2. *Seja A uma matriz $k \times n$. Então $\operatorname{car} A^T = \operatorname{car} A$.*

O exemplo seguinte ilustra como se pode usar o conceito de espaço das linhas para obter uma base "simples" para um dado espaço vetorial.

Exemplo. Mostre que os vetores

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -1, -2, 1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (-3, -6, 5, 5, -8), \quad \boldsymbol{v}_3 = (1, 2, -1, 0, 4)$$

são linearmente independentes. Obtenha uma base de $\mathbb{R}^5$ que contenha os vetores anteriores.

Os vetores são linearmente independentes se e só se as linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

o forem. Usando o MEG, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -3 & -6 & 5 & 5 & -8 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{R},$$

donde se conclui que os vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ são linearmente independentes e que o conjunto

$$\{\underbrace{(1, 2, -1, -2, 1)}_{\boldsymbol{u}_1}, \underbrace{(0, 0, 2, -1, -5)}_{\boldsymbol{u}_2}, \underbrace{(0, 0, 0, 2, 3)}_{\boldsymbol{u}_3}\}$$

é uma base de $\mathcal{L}(\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\})$. (Note que usámos aqui a Proposição 24.)

Observando que as colunas em que os pivôs se encontram na matriz R são as colunas 1, 3 e 4, é claro que $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, (0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^5$. Assim, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, (0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1)\}$ é também uma base de $\mathbb{R}^5$.

$\mathbb{C}^n$ e os espaços vetoriais complexos

Um conjunto V, com $V \neq \emptyset$, munido com as operações de adição $(+)$ e multiplicação por escalares (mpe)

adição	$+ : V \times V \to V$ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$
multiplicação por escalares	$mpe : \mathbb{C} \times V \to V$ $(\alpha, \boldsymbol{u}) \mapsto \alpha \boldsymbol{u}$

satisfazendo as propriedades abaixo diz-se um **espaço vetorial complexo** ou um **espaço linear complexo**.

Propriedades da adição e da multiplicação por escalares

Quaisquer que sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tem-se:

(i) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(ii) $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$

(iii) Existe um **elemento neutro** $\mathbf{0}$, i.e., qualquer que seja $\boldsymbol{u}$,

$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u} = \mathbf{0} + \boldsymbol{u}$$

(iv) Todo o elemento $\boldsymbol{u} \in V$ admite um **elemento simétrico** $-\boldsymbol{u} \in V$, i.e.,

$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}$$

(v) $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{v}$

(vi) $(\alpha\beta)\boldsymbol{u} = \alpha(\beta \boldsymbol{u})$

(vii) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{u}$

(viii) $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

Exemplos de espaços vetoriais complexos

1. Consideremos conjunto

$$\mathbb{C}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

das sequências de n números complexo. Usaremos a notação seguinte para representar um elemento $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$:

$$\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Quaisquer que sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, definam-se as operações de adição e de multiplicação por escalares do seguinte modo:

Adição

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalares

$$\alpha\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$

Quando munido com as operações de adição e de multiplicação por escalares definidas acima, $\mathbb{C}^n$ é um espaço vetorial real.

2. A solução geral do SEL homogéneo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i & -i & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

é o espaço vetorial S= $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 = x_2\}$. ($S$ está contido no espaço vetorial $\mathbb{C}^3$.)

3. O conjunto $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{C})$ das matrizes complexas de tipo $k \times n$ com as operações de adição e de multiplicação por escalares usuais é um espaço vetorial complexo.

4. O conjunto

$$\{p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \cdots + a_n z^n \colon a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

dos polinómios complexos de grau menor ou igual a n com as operações de adição e de multiplicação por escalares usuais é um espaço vetorial complexo.

Outros exemplos de espaços vetoriais complexos podem ser obtidos comparando com os exemplos da secção "Exemplos de espaços vetoriais reais".

Todos os conceitos apresentados anteriormente no caso de espaços vetoriais reais têm uma contrapartida no caso dos espaços vetoriais complexos. Também para os espaços vetoriais complexos são definidos de modo semelhante os conceitos de subespaço linear, combinação linear, independência linear, bases, dimensão e vetor das coordenadas dum vetor numa base, e, além disso, todos eles satisfazem teoremas análogos aos dos espaços vetoriais reais apresentados anteriormente.

Exemplo

a) $\mathcal{E}_2 = \{(1,0),(0,1)\} \quad \leftarrow$ é uma base de $\mathbb{C}^2$, e portanto $\dim \mathbb{C}^2 = 2$.

b) Uma outra base de $\mathbb{C}^2$ é $\mathcal{B} = \{(1,-i),(1,2i)\}$.

Uma vez que $\dim \mathbb{C}^2 = 2$, quaisquer dois vetores linearmente independentes geram $\mathbb{C}^2$. Assim $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$, se $\mathcal{B}$ for um conjunto linearmente independente. Como

$$\operatorname{car}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2i \end{bmatrix} = 2,$$

o SEL homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é possível e determinado e, portanto, os vetores $(1,-i),(1,2i)$ são linearmente independentes.

(Outra maneira de verificar que $\mathcal{B}$ é uma base seria aplicar a versão complexa da Proposição 19.)

O conjunto $\mathcal{E}_n = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\}$ é a **base canónica** de $\mathbb{C}^n$.

Subespaços associados a uma matriz complexa

Sendo A uma matriz complexa de tipo $k \times n$, definem-se

$N(A)$ **núcleo de** A - o conjunto das soluções do sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Trata-se de um subespaço de $\mathbb{C}^n$.

$L(A)$ **espaço das linhas de** A - o subespaço de $\mathbb{C}^n$ gerado pelas linhas de A.

$C(A)$ **espaço das colunas de** A - o subespaço de $\mathbb{C}^k$ gerado pelas colunas de A.

Observação. Teoremas análogos aos obtidos para matrizes reais continuam válidos no caso das matrizes complexas.

Exercício. Determine $N(A), L(A)$ e $C(A)$, e verifique o teorema das dimensões (cf. Teorema 10), sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 2i \end{bmatrix}.$$

Solução. Comecemos por determinar o núcleo $N(A)$, devendo para isso resolver o SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tem-se então

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 2i \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+iL_1]{} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}, \tag{14}$$

donde a solução geral do sistema é

$$N(A) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \colon x_1 = -ix_2, x_3 = 0\}.$$

Assim qualquer vetor $(x_1, x_2, x_3) \in N(A)$ pode ser representado como

$$(x_1, x_2, x_3) = (-ix_2, x_2, 0) = x_2(-i, 1, 0),$$

vendo-se imediatamente que uma base $\mathcal{B}_{N(A)}$ para o núcleo é

$$\mathcal{B}_{N(A)} = \{(-i, 1, 0)\}$$

e que, consequentemente, $\dim N(A) = 1$.

Usando (14), vê-se imediatamente que

$$L(A) = \mathcal{L}(\{(1, i, 0), (0, 0, 2i)\}) \qquad C(A) = \mathcal{L}(\{(1, -i), (0, 2i)\},$$

e que bases para estes espaços são, respetivamente,

$$\mathcal{B}_{L(A)} = \{(1, i, 0), (0, 0, 2i)\} \qquad \mathcal{B}_{C(A)} = \{(1, -i), (0, 2i)\}.$$

Deste modo, $\dim L(A) = 2 = \dim C(A)$.

Como previsto pelo Teorema 10,

$$\underbrace{n^{\underline{o}} \text{ de colunas de } A}_{3} = \underbrace{\dim N(A)}_{1} + \underbrace{\dim L(A)}_{2}.$$

A proposição seguinte caracteriza a invertiblidade de uma matriz real ou complexa em termos dos subespaços a ela associados.

Proposição 27. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(i) *A é invertível.*

(ii) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) *As linhas de A são linearmente independentes.*

(iv) *As linhas de A formam uma base de $\mathbb{K}^n$.*

(v) $\dim L(A) = n$.

(vi) *As colunas de A são linearmente independentes.*

(vii) *As colunas de A formam uma base de $\mathbb{K}^n$.*

(viii) $\dim C(A) = n$.

Demonstração. A equivalência (i) $\Leftrightarrow$ (ii) já foi mostrada anteriormente (cf. Teorema 1).

(ii) $\Leftrightarrow$ (v) O núcleo $N(A)$ é igual $\{\mathbf{0}\}$ se e só se o SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é possível e determinado. Então $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ se e só se $\operatorname{car} A = n$ e, portanto, se e só se $\dim L(A) = n$.

As equivalências (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v) são imediatas.

Notando que $L(A^T) = C(A)$ e que A é invertível se e só se A^T, prova-se imediatamente que (i) $\Leftrightarrow$ (vi) $\Leftrightarrow$ (vii) $\Leftrightarrow$ (viii).

□

Podemos agora obter a terceira versão (de quatro versões) do teorema sobre condições necessárias e suficientes de invertibilidade de uma matriz.

Condições necessárias e suficientes de invertibilidade (III)

Teorema 11. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) *A é invertível.*

ii) $\operatorname{car} A = n$.

iii) *A é um produto de matrizes elementares.*

iv) *A pode ser transformada na matriz identidade à custa de operações elementares.*

v) *A forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade.*

vi) *O sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ admite apenas a solução trivial.*

vii) *Dada uma matriz coluna $\mathbf{b}$ de tipo $n \times 1$, o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e determinado.*

viii) $|A| \neq 0$.

(ix) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(x) *As linhas de A são linearmente independentes.*

(xi) *As linhas de A formam uma base de $\mathbb{K}^n$.*

(xii) $\dim L(A) = n$.

(xiii) *As colunas de A são linearmente independentes.*

(xiv) *As colunas de A formam uma base de $\mathbb{K}^n$.*

(xv) $\dim C(A) = n$.

Solução geral do sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Seja A uma matriz (real ou complexa) de tipo $k \times n$. Seja $\mathbf{x}_0$ uma solução do SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e seja $\mathbf{x}_p$ uma solução particular do SEL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Por outras palavras, estamos a supor que $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_p$ são vetores tais que

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \qquad\qquad A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}.$$

Consideremos o SEL

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral do SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2\}$, donde, por exemplo, $\mathbf{x}_0 = (3, 3, -17)$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Verifique que $\mathbf{x}_p = (5, 4, 10)$ é uma solução do SEL não homogéneo.

Então o vetor $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p$ é uma solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ porque

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p) \\ &= A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_p \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, é fácil verificar que qualquer solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem esta forma. De facto, se $\mathbf{x}_1$ for outra solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tem-se

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_p) &= A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_p \\ &= \mathbf{b} - \mathbf{b} \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

donde resulta que $\mathbf{x}_0' = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_p$ é uma solução do SEL homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Assim, mais uma vez se tem que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0' + \mathbf{x}_p$, ou seja, $\mathbf{x}_1$ é a soma duma solução do SEL homogéneo com a solução particular $\mathbf{x}_p$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Podemos pois concluir que a solução geral $\mathcal{S}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se pode exprimir como

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x_p}\} + N(A),$$

onde

$$\{\mathbf{x_p}\} + N(A) := \{\mathbf{x_p} + \mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in N(A)\}.$$

Proposição 28. *Seja A uma matriz $k \times n$ e seja $\mathbf{b}$ um vetor $k \times 1$. O sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível se e só se $\mathbf{b} \in C(A)$. Além disso, se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível, então a sua solução geral $\mathcal{S}$ é*

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x_p}\} + N(A),$$

onde $\mathbf{x_p}$ é uma solução particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Matriz de mudança de base

Seja V um espaço vetorial de dimensão k, sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases de V e seja $\boldsymbol{u} \in V$ um vetor. Veremos em seguida como é possível relacionar os vetores $\boldsymbol{u}_{\mathcal{B}_1}, \boldsymbol{u}_{\mathcal{B}_2} \in \mathbb{R}^k$ das coordenadas $\boldsymbol{u}$, respetivamente, na base $\mathcal{B}_1$ e na base $\mathcal{B}_2$.

Consideremos um vetor $\boldsymbol{u} \in V$ e as bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$, onde $\mathcal{B}_1 = \big(\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_k}\big)$. Tem-se então que

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \alpha_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b_k}.$$

Assim

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u})_{\mathcal{B}_2} &= (\alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \alpha_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b_k})_{\mathcal{B}_2} \\ &= (\alpha_1 \boldsymbol{b_1})_{\mathcal{B}_2} + (\alpha_2 \boldsymbol{b_2})_{\mathcal{B}_2} + \cdots + (\alpha_k \boldsymbol{b_k})_{\mathcal{B}_2} \\ &= \alpha_1 (\boldsymbol{b_1})_{\mathcal{B}_2} + \alpha_2 (\boldsymbol{b_2})_{\mathcal{B}_2} + \cdots + \alpha_k (\boldsymbol{b_k})_{\mathcal{B}_2}.\end{aligned}$$

[6]

A igualdade anterior ainda pode ser expressa em termos matriciais como

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}_2} = \big[(\mathbf{b_1})_{\mathcal{B}_2} \quad | \quad (\mathbf{b_2})_{\mathcal{B}_2} \quad | \quad \cdots \quad | \quad (\mathbf{b_k})_{\mathcal{B}_2}\big] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}_2} = \underbrace{\big[(\mathbf{b_1})_{\mathcal{B}_2} \quad | \quad (\mathbf{b_2})_{\mathcal{B}_2} \quad | \quad \cdots \quad | \quad (\mathbf{b_k})_{\mathcal{B}_2}\big]}_{M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}} \mathbf{u}_{\mathcal{B}_1}.$$

A matriz cujas colunas são formadas pelos vetores das coordenadas na base $\mathcal{B}_2$ dos vetores da base ordenada $\mathcal{B}_1$ chama-se **matriz de mudança de base da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$**, e denota-se por $M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$. Tem-se então que

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} \mathbf{u}_{\mathcal{B}_1}.$$

[6] Recorde que, sendo B uma base de V e $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, α um escalar, se tem

$$(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{v}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{w}_{\mathcal{B}} \qquad (\alpha \boldsymbol{v})_{\mathcal{B}} = \alpha(\boldsymbol{v})_{\mathcal{B}}$$

(veja a Proposição 20).

Exercício. Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B} = ((1,1),(-1,0))$ e

$$\mathcal{E}_2 = \big(\underbrace{(1,0)}_{e_1},\underbrace{(0,1)}_{e_2}\big) \quad \leftarrow \quad \text{base canónica}$$

Use a matriz de mudança de base $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_2}$ da base canónica para a base B para calcular $(2,3)_{\mathcal{B}}$. Compare com os exemplos da secção "Bases e coordenadas".

Exercício - Mostre que, se existe uma matriz M tal que, para todo o vetor $\boldsymbol{u} \in V$, se tem $\mathbf{u}_{\mathcal{B}_2} = M\mathbf{u}_{\mathcal{B}_1}$, então $M = M_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}$.

Exemplo. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \big((0,1,0),(1,0,1),(2,1,0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para a base $\mathcal{B}$.

Sendo $\mathcal{E}_3 = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, a matriz de mudança de base $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3}$ é

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3} = \big[(\mathbf{e}_1)_{\mathcal{B}} \;\big|\; (\mathbf{e}_2)_{\mathcal{B}} \;\big|\; (\mathbf{e}_3)_{\mathcal{B}}\big].$$

Teremos assim que determinar os vetores das coordenadas de $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ na base $\mathcal{B}$. Ou seja, há que resolver três sistemas de equações lineares, o que faremos em simultâneo. Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \dots$$

$$\dots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \dots$$

$$\dots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right].$$

Então

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base $M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$ é uma matriz invertível porque $\operatorname{car}(M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}) = k$ (cf. Proposição 19 e Proposição 21). Deste modo, usando a igualdade

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} \mathbf{u}_{\mathcal{B}_1},$$

obtemos

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}_1} = \left(M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}\right)^{-1} \mathbf{u}_{\mathcal{B}_2}.$$

Finalmente tem-se

$$M_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} = (M_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1})^{-1}.$$

Exemplo. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \big(\underbrace{(0,1,0)}_{\boldsymbol{b_1}}, \underbrace{(1,0,1)}_{\boldsymbol{b_2}}, \underbrace{(2,1,0)}_{\boldsymbol{b_3}}\big)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança de base da base $\mathcal{B}$ para base canónica de $\mathbb{R}^3$.

A matriz de mudança de base $M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}$ é

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}} &= \left[(\mathbf{b}_1)_{\mathcal{E}_3} \;\middle|\; (\mathbf{b}_2)_{\mathcal{E}_3} \;\middle|\; (\mathbf{b}_3)_{\mathcal{E}_3} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que $M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_3} = M_{\mathcal{E}_3 \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$ (compare com o exemplo anterior).

10

Valores próprios e vetores próprios

Valores próprios e vetores próprios

Sendo A uma matriz em $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, diz-se que um vetor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, não nulo, é um **vetor próprio** de A se existir $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{15}$$

Nestas condições, λ diz-se um **valor próprio** de A associado (ou correspondente) a $\boldsymbol{x}$. O **espetro de** A, designado por $\sigma(A)$, é o conjunto dos valores próprios da matriz A.

Para determinar o espetro de A é necessário resolver a equação (15) ou, equivalentemente, resolver a equação

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0. \tag{16}$$

Uma vez que pretendemos determinar valores de λ para os quais existem vetores $\mathbf{x}$ não nulos que satisfaçam a equação (15), o SEL homogéneo (16) terá que ter soluções não nulas. Consequentemente, a matriz do sistema $A - \lambda I$ não pode ser invertível. Usando o Teorema 3, a matriz $A - \lambda I$ não é invertível se e só se $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio $\det(A - \lambda I)$ é um polinómio de grau n na variável λ dito o **polinómio característico** da matriz A, e a equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é a **equação característica**:

$$\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\textbf{polinómio característico}} = 0 \tag{17}$$

Os valores próprios da matriz A são, portanto, as raízes do polinómio característico de A.

Dado um valor próprio λ, o **espaço próprio** $E(\lambda)$ associado ao valor próprio λ é a solução geral do SEL homogéneo (16). Por outras palavras, $E(\lambda)$ é o núcleo da matriz $A - \lambda I$:

$$E(\lambda) = N(A - \lambda I).$$

Exemplo. Determine o espetro e bases para os espaços próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solução. Comecemos por determinar os valores próprios de A. O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= (-1-\lambda)^2(1-\lambda). \end{aligned}$$

As raizes de $p(\lambda) = (-1-\lambda)^2(1-\lambda)$, ou seja, as soluções da equação característica (17) são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, sendo esta ultima uma raiz dupla. Assim, os valores próprios de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, e o espetro de A é $\sigma(A) = \{-1, 1\}$.

O espaço próprio $E(1)$ é constituído pelos vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ e, portanto, $E(1)$ é o núcleo $N(A - I)$ da matriz $A - I$. Calculando este núcleo usando o MEG, temos:

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço próprio $E(1)$ é a solução geral do sistema homogéneo associado à matriz $A - I$ e, portanto,

$$E(1) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \colon x = -y\}.$$

O espaço próprio $E(1)$ é, portanto, a reta de equações $z = 0$ e $x = -y$. Note que $E(1)$ é a solução geral dum SEL possível e indeterminado com grau de indeterminação 1.

O espaço próprio $E(-1)$ é constituído pelos vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_2 = -1$ e, portanto, $E(-1)$ é o núcleo $N(A+I)$ da matriz $A+I$. Procedendo analogamente ao que se fez acima para determinar o espaço próprio anterior, tem-se

$$E(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}.$$

O espaço próprio $E(-1)$ é o plano de equação $x = y$, correspondendo à solução geral dum SEL possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.

Note que, sendo λ um valor próprio duma matriz, o espaço próprio $E(\lambda)$ é sempre a solução geral dum sistema possível e indeterminado. De facto, $E(\lambda)$ é a solução geral dum sistema homogéneo e, portanto, dum sistema possível. Por outro lado, se λ é um valor próprio então, por definição, o SEL (16) tem soluções não nulas, ou seja, é um SEL possível e indeterminado.

Seja λ um valor próprio (vap) duma matriz quadrada A de ordem n. A **multiplicidade algébrica** (m.a.) de λ é a multiplicidade de λ enquanto raiz do polinómio característico $p(\lambda)$. A **multiplicidade geométrica** (m.g.) de λ é a dimensão do espaço próprio $E(\lambda)$.

No exemplo anterior, temos

vap	m.a.	m.g.
$\lambda_1 = 1$	1	1
$\lambda_2 = -1$	2	2

Embora neste exemplo haja igualdade entre a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica para cada um dos valores próprios, não é sempre assim na generalidade dos casos.

Proposição 29. *Seja λ um valor próprio duma matriz. A multiplicidade geométrica de λ é menor ou igual à sua multiplicidade algébrica.*

Proposição 30. *Seja A uma matriz de ordem n e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A (eventualmente repetidos).*

(i) $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

(ii) $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Demonstração. Seja

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) \tag{18}$$

o polinómio característico da matriz A. (Note que as raízes podem estar repetidas). [7]

Observando que

$$p(0) = |A - 0I| = |A|$$

e fazendo $\lambda = 0$ na fatorização (18), tem-se

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

□

Seja A uma matriz quadrada complexa de ordem n e seja

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2}\cdots(\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

o seu polinómio característico, onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ são todos distintos. Então

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n.$$

Proposição 31. *Seja A uma matriz quadrada. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(i) *A é invertivel.*

(ii) $0 \notin \sigma(A)$.

(iii) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

Note que se $0 \in \sigma(A)$, o núcleo de A coincide com o espaço próprio $E(0)$, i.e.,

$$N(A) = E(0)\ .$$

Obtemos assim a última versão do teorema que agrupa condições necessárias e suficientes de invertibilidade de uma matriz.

[7] O polinómio característico pode não ser fatorizável em $\mathbb{R}$ sob a forma de (18). Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tem como polinómio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ que não tem raízes reais. No entanto, o Teorema Fundamental da Álgebra garante que todo o polinómio de grau n (com $n \geq 1$) tem n raízes complexas (eventualmente repetidas).

Condições necessárias e suficientes de invertibilidade (IV)

Teorema 12. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas em $\mathbb{K}$. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) *A é invertível.*

ii) $\operatorname{car} A = n$.

iii) *A é um produto de matrizes elementares.*

iv) *A pode ser transformada na matriz identidade à custa de operações elementares.*

v) *A forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade.*

vi) *O sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ admite apenas a solução trivial.*

vii) *Dada uma matriz coluna $\mathbf{b}$ de tipo $n \times 1$, o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e determinado.*

viii) $|A| \neq 0$.

(ix) $N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

(x) *As linhas de A são linearmente independentes.*

(xi) *As linhas de A formam uma base de $\mathbb{K}^n$.*

(xii) $\dim L(A) = n$.

(xiii) *As colunas de A são linearmente independentes.*

(xiv) *As colunas de A formam uma base de $\mathbb{K}^n$.*

(xv) $\dim C(A) = n$.

(xvi) $0 \notin \sigma(A)$.

Proposição 32. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e seja p um inteiro positivo.*

(i) $\lambda \in \sigma(A)$ *sse* $\lambda \in \sigma(A^T)$.

(ii) Se $\lambda \in \sigma(A)$ *e* $\boldsymbol{x}$ *é um vetor próprio associado a* λ*, então* $\lambda^p \in \sigma(A^p)$ *e* $\boldsymbol{x}$ *é um vetor próprio associado a* λ^p.

(iii) Se $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *for uma matriz em que todas as entradas são reais, então* $\lambda \in \sigma(A)$ *sse* $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$*. Além disso,*

$$E(\bar{\lambda}) = \{\bar{\boldsymbol{x}} \,:\, \boldsymbol{x} \in E(\lambda)\}.$$

A afirmação (iii) pode ser interpretada de modo informal como "*os valores próprios complexos de matrizes com entradas reais surgem aos pares*".

Uma matriz complexa quadrada $A = [a_{ij}]$ diz-se uma **matriz hermitiana** se $A = \bar{A}^T$, onde $\bar{A} = [b_{ij}]$ é a matriz definida por $b_{ij} = \bar{a}_{ij}$, quaisquer que sejam i, j.

N.B.- As entradas na diagonal de uma matriz hermitiana de ordem n são reais, i.e., qualquer que seja $i = 1, \ldots, n$, tem-se $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Proposição 33. *Seja A uma matriz complexa quadrada de ordem n. Se A é hermitiana, então o seu espetro $\sigma(A)$ está contido em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja λ um valor próprio de A e seja $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ um vetor próprio de A associado a λ, i.e, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Então

$$\begin{aligned}
(\overline{A\mathbf{x}})^T &= (\overline{\lambda\mathbf{x}})^T \\
(\overline{A}\overline{\mathbf{x}})^T &= \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T \\
\overline{\mathbf{x}}^T\overline{A}^T &= \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T.
\end{aligned}$$

Sendo A hermitiana, tem-se então que

$$\overline{\mathbf{x}}^T A = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T.$$

Multplicando ambos os membros desta igualdade por $\mathbf{x}$ à direita, tem-se

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} &= \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \\
\overline{\mathbf{x}}^T(\lambda\mathbf{x}) &= \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \\
\lambda\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} &= \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \\
\lambda(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) &= \overline{\lambda}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).
\end{aligned}$$

Assim

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \underbrace{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}_{\neq 0} = 0,$$

donde $\lambda = \overline{\lambda}$, ou seja, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Matrizes semelhantes e diagonalização

Sejam A e B duas matrizes (reais ou complexas) quadradas de ordem n. Diz-se que B é **semelhante** a A se existir uma matriz S invertível tal que

$$B = S^{-1}AS$$

ou, equivalentemente, se

$$SB = AS.$$

Não é difícil verificar que B é semelhante a A se e só se A é semelhante a B. Consequentemente, diz-se que A e B são **matrizes semelhantes**.

Teorema 13. *Sejam A e B matrizes semelhantes de ordem n.*

(i) $|A| = |B|$.

(ii) A é invertível se e só se B é invertível.

(iii) $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$.

(iv) $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.

(v) $\sigma(A) = \sigma(B)$ e as correspondentes multiplicidades algébricas (resp., multiplicidades geométricas) de cada valor próprio coincidem.

(vi) $\dim N(A) = \dim N(B)$.

(vii) $\operatorname{car} A = \operatorname{car} B$.

Uma matriz A quadrada de ordem n diz-se **diagonalizável** se existir uma matriz diagonal D e se existir uma matriz invertível S tais que

$$D = S^{-1}AS$$

ou, equivalentemente, se

$$SD = AS\ .$$

Nestas condições, S diz-se uma **matriz diagonalizante** de A.

Teorema 14. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(i) A é diagonalizável

(ii) A tem n vetores próprios linearmente independentes.

(iii) Existe uma base de $\mathbb{K}^n$ formada por vetores próprios de A.

Demonstração. Suponhamos que A tem n vetores próprios $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearmente independentes. Consideremos a matriz

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \cdots & | & v_n \end{bmatrix}.$$

(Note que S é invertível.) Então

$$\begin{aligned} AS &= A \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \cdots & | & v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Av_1 & | & Av_2 & | & \cdots & | & Av_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \cdots & | & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= SD \end{aligned}$$

Mostrou-se assim que, se A tem n vetores próprios linearmente independentes, então A é diagonalizável.

Reciprocamente, suponhamos que A é diagonalizável. Então

$$AS = SD \qquad \text{onde} \qquad S = \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \cdots & | & v_n \end{bmatrix}.$$

(Note que, sendo S invertível, as colunas de S são vetores linearmente independentes de $\mathbb{K}^n$.)

$$AS = \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \cdots & | & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} v_1 & | & v_2 & | & \cdots & | & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & | & \lambda_2 v_2 & | & \cdots & | & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Av_1 & | & Av_2 & | & \cdots & | & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & | & \lambda_2 v_2 & | & \cdots & | & \lambda_n v_n \end{bmatrix}$$

Assim,

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad \ldots, \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

donde A tem n vetores próprios linearmente independentes. □

Exemplo. Mostre que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável. Calcule A^{2015}.

Solução. Os valores próprios de A são ± 1:

vap	m.a.	m.g.
$\lambda_1 = 1$	1	1
$\lambda_2 = -1$	1	1

O espaço próprio $E(1)$ é a reta de equação $x = -y$ e o espaço próprio $E(-1)$ é a reta de equação $x = y$. Escolham-se, por exemplo, os vetores próprios $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1) \in E(1)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1) \in E(-1)$. É fácil verificar que estes vetores são linearmente independentes.

O Teorema 14 garante agora que A é diagonalizável e que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S}.$$

(Esta é uma solução possível de entre muitas outras já que, por exemplo, a matriz S depende dos vetores próprios que se escolhem.)

Com o objetivo de calcular A^{2015}, vamos começar por calcular A^2:

$$\begin{aligned} A^2 &= (SDS^{-1})^2 \\ &= SD\underbrace{S^{-1}S}_{I}DS^{-1} \\ &= SD^2S^{-1}. \end{aligned}$$

Generalizando este processo, não é difícil reconhecer que $A^{2015} = SD^{2015}S^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} A^{2015} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{2015} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A}. \end{aligned}$$

Neste caso particular seria muito fácil calcular A^{2015} sem usar a diagonalização uma vez que $A = -P_{12}$. No entanto, pretende-se ilustrar com um exemplo simples um procedimento útil na generalidade dos casos.

Uma dificuldade que pode ocorrer quando se pretende diagonalizar uma matriz é escolher os vetores próprios de modo a que sejam linearmente independentes como se requer no Teorema 14. A proposição seguinte permite ultrapassar essa dificuldade.

Proposição 34. *Sejam $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ vetores próprios duma matriz quadrada A de ordem k e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ os correspondentes valores próprios, todos distintos. Então os vetores próprios $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ são linearmente independentes.*

Demonstração. O resultado é trivialmente verdadeiro quando $p = 1$.
Sendo $1 < n$, suponhamos então que a afirmação é verdadeira para $n - 1$ vetores próprios, e provemos que o mesmo se passa para n vetores próprios. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o vetor $\boldsymbol{v}_n$ é combinação linear dos restantes vetores próprios. Ou seja, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ tais que

$$\boldsymbol{v}_n = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}.$$

Então

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v}_n &= \lambda_n\boldsymbol{v}_n \\ A(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}) &= \lambda_n(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}) \\ \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_n\boldsymbol{v}_{n-1} &= \lambda_n(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}) \end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha_1(\lambda_n - \lambda_1)\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2(\lambda_n - \lambda_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1})\boldsymbol{v}_{n-1} = 0$$

Atendendo a que os vetores próprios $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ são linearmente independentes, temos

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_n - \lambda_1) = 0 \\ \alpha_2(\lambda_n - \lambda_2) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = 0\ . \end{cases}$$

Como existe pelo menos um escalar $\alpha_i \neq 0$, ter-se-á que $\lambda_n = \lambda_i$, o que contradiz a hipótese inicial de todos os valores próprios serem distintos. $\square$

Corolário 3. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n com n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.*

Demonstração. Este resultado é consequência imediata do Teorema 14 e da Proposição 34. $\square$

Proposição 35. *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ valores próprios, todos distintos, de uma matriz quadrada A de ordem k e sejam $B_{E(\lambda_1)}, B_{E(\lambda_2)}, \ldots, B_{E(\lambda_p)}$ bases dos correspondentes espaços próprios. Então $B_{E(\lambda_1)} \cup B_{E(\lambda_2)} \cup \cdots \cup B_{E(\lambda_p)}$ é um conjunto linearmente independente.*

Demonstração. Seja, para todo o $i = 1, 2, \ldots, p$, $B_{E(\lambda_i)} = \{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots v_{r_i}^{(i)}\}$ uma base do espaço próprio $E(\lambda_i)$. Mostrar-se-á que o conjunto definido por

$$B = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots v_{r_1}^{(1)}\} \cup \{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots v_{r_2}^{(2)}\} \cup \cdots \cup \{v_1^{(p)}, v_2^{(p)}, \ldots v_{r_p}^{(p)}\}$$

é linearmente independente.
Suponhamos, sem perda de generalidade, que $v_1^{(1)}$ é uma combinação linear dos restantes vetores:

$$v_1^{(1)} = \underbrace{\alpha_2^{(1)} v_2^{(1)} + \cdots + \alpha_{r_1}^{(1)} v_{r_1}^{(1)}}_{u_1} + \underbrace{\alpha_1^{(2)} v_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} v_2^{(2)} + \cdots + \alpha_{r_2}^{(2)} v_{r_2}^{(2)}}_{u_2} +$$
$$+ \cdots + \underbrace{\alpha_1^{(p)} v_1^{(p)} + \alpha_2^{(p)} v_2^{(p)} + \cdots + \alpha_{r_p}^{(p)} v_{r_p}^{(p)}}_{u_p}\ .$$

onde, para algum $i = 2, \ldots, p$, o vetor u_i é diferente de $\mathbf{0}$. (Note que, se assim não fosse, $v_1^{(1)}$ estaria na expansão linear de $\{v_2^{(1)}, \ldots v_{r_1}^{(1)}\}$, o que é impossível.)

Resulta então que

$$Av_1^{(1)} = Au_1 + Au_2 + \cdots + Au_p,$$

donde

$$\lambda_1(u_1 + u_2 + \cdots + u_p) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

Assim, obtemos a igualdade

$$(\lambda_1 - \lambda_2)u_2 + \cdots + (\lambda_1 - \lambda_p)u_p = 0. \tag{19}$$

Os vetores não nulos contidos em $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ são vetores próprios correspondentes a valores próprios distintos e, portanto, são linearmente independentes (cf. a Proposição 34). Uma vez que na igualdade (19) existe pelo menos um $i \in \{2, \ldots, p\}$ tal que $u_i \neq 0$, o valor próprio λ_1 é igual ao valor próprio λ_i, o que é contrário à hipótese de todos os valores próprios serem distintos. $\square$

Proposição 36. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

(i) A matriz A é diagonalizável.

(ii) Qualquer que seja o valor próprio λ de A, a multiplicidade algébrica de λ é igual à multiplicidade geométrica de λ.

Demonstração. (i)$\Rightarrow$(ii) Suponhamos que A é diagonalizável e que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ são os valores próprios de A. A matriz A é então semelhante a uma matriz diagonal D e, qualquer que seja $i = 1, 2, \ldots, p$,

$$\begin{aligned}
\text{m.g.}_{\lambda_i} &= \dim N(A - \lambda_i I) \\
&= \dim N(D - \lambda_i I) \qquad \text{(usando o Teorema 13)} \\
&= n - \operatorname{car}(D - \lambda_i I) \qquad \text{(usando o Teorema 10)} \\
&= n - (n - \text{ma}_{\lambda_i}) \\
&= \text{m.a.}_{\lambda_i}\ .
\end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de A e suponhamos que, qualquer que seja $i = 1, 2, \ldots, p$, se tem $\text{m.g.}_{\lambda_i} = \text{m.a.}_{\lambda_i} = r_i$. Note-se que

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n.$$

Seja, para todo o $i = 1, 2, \ldots, p$, $\{v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots v_{r_i}^{(i)}\}$ uma base do espaço próprio $E(\lambda_i)$. Mostrar-se-á que o conjunto definido por

$$B = \{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \ldots v_{r_1}^{(1)}\} \cup \{v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \ldots v_{r_2}^{(2)}\} \cup \cdots \cup \{v_1^{(p)}, v_2^{(p)}, \ldots v_{r_p}^{(p)}\}$$

é uma base de $\mathbb{K}^n$ (cf. Teorema 14). Atendendo a que B tem n elementos, basta mostrar que B é linearmente independente. Mas isso é uma consequência imediata da Proposição 35. $\square$

Como dissémos anteriormente, a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de um dado valor próprio não têm que coincidir. Na realidade, se isso acontecer para cada um dos valores próprios, a matriz é forçosamente diagonalizável, como assegura a Proposição 36.