A Parte de Torção de um Módulo:

Def.: Um R-módulo é de *tipo finito* ou *finitamente gerado* se possui um conjunto finito de geradores.
Assim, M é um R-mod. finitamente gerado, se existem $m_1, \dots, m_n \in M$ tais que

$$M = R.m_1 + \dots + R.m_n .$$

Def.: Um R-módulo M é *cíclico* se existe $m \in M$ tal que $M = R.m$.

Neste caso, temos um homomorfismo de R-módulos

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow M = R.m \\ r &\longmapsto r.m \end{aligned}.$$

f é sobrejectivo, e portanto,

$$M = R.m \cong R/_{Ker(f)},$$

onde $Ker(f) = \{ r \in R : r.m = 0 \}$.

Def.: Se M é um R-módulo e $m \in M$, definimos o *anulador em R de m*, $Ann_R(m)$, da seguinte maneira:

$$Ann_R(M) = \{ r \in R : r.m = 0 \}.$$

Temos sempre que $R.m \simeq R/_{\mathrm{Ann}_R(m)}$.

<u>Def.:</u> M R-módulo, $m \in M$.

Se $\mathrm{Ann}_R(m) = \{0\}$, dizemos que m é um <u>elemento livre.</u> Neste caso, $R.m \simeq R$.

Se $\mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0\}$, dizemos que m é um <u>elemento de torção</u>, e neste caso $R.m \not\simeq R$.

<u>Definição:</u> M R-módulo.

A <u>parte de torção de M</u>, $\mathrm{Tor}(M)$, é definida assim:

$$\mathrm{Tor}(M) = \{ m \in M : \mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0\} \}.$$

<u>Exemplos:</u> 1) $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$.

$\mathrm{Tor}(M) = \{0\}$.

2) $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$\mathrm{Tor}(M) = M$.

3) $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

$\mathrm{Tor}(M) = \{0+6\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z}, 3+6\mathbb{Z}, 4+6\mathbb{Z}\}$.

Neste caso, $\{0\} \neq \mathrm{Tor}(M) \neq M$.

Obs.: $\mathrm{Tor}(M)$ não tem que ser um R-submódulo de M.

No Ex. 3), $3+6\mathbb{Z} \in \mathrm{Tor}(M)$ e
$4+6\mathbb{Z} \in \mathrm{Tor}(M)$.

No entanto, $(3+6\mathbb{Z})+(4+6\mathbb{Z}) = 1+6\mathbb{Z} \notin \mathrm{Tor}(M)$.

Proposição: Seja R um domínio e M um R-módulo. Então, $\mathrm{Tor}(M)$ é um R-submódulo de M.

Dem.:

- $\mathrm{Tor}(M) \neq \emptyset$, pois $\mathrm{Ann}_R(0) = R \neq \{0\}$,
  e logo, $0 \in \mathrm{Tor}(M)$.

- Sejam $m_1, m_2 \in \mathrm{Tor}(M)$.
  $\exists\, r_1, r_2 \in R\setminus\{0\}$ tq $r_1 . m_1 = 0$ e $r_2 . m_2 = 0$.
  Como R é domínio, $r_1 . r_2 \neq 0$.
  E $r_1 . r_2 . (m_1 + m_2) = r_2 . (r_1 . m_1) + r_1 . (r_2 . m_2) = 0 + 0 = 0$.
  $\therefore\ m_1 + m_2 \in \mathrm{Tor}(M)$.

- Sejam $m \in \mathrm{Tor}(M)$ e $s \in R$.
  $\exists\, r \in R\setminus\{0\}$ tq $r . m = 0$.
  Assim, $r.(s.m) = (r.s).m = (s.r).m =$
  $= s.(r.m) = s.0 = 0$.
  $\therefore\ s.m \in \mathrm{Tor}(M)$.

$\blacksquare$

Voltaremos a TOR(M) daqui a umas páginas...

——— " ——— " ———

Sejam R e S anéis comutativos,
e seja $f: R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis.

Sabemos que S é um R-módulo, com a multiplicação por escalar definida da seguinte maneira

$$R \times S \longrightarrow S$$
$$(r, s) \longmapsto f(r) \cdot s \quad .$$

Seja M um R-módulo.
Então, $S \otimes_R M$ é um R-módulo.

Proposição: $S \otimes_R M$ também é um S-módulo.

Dem.: Como $S \otimes_R M$ é um R-módulo, então este conjunto com a operação soma já tem estrutura de grupo abeliano.

Falta definir uma multiplicação por escalar

$$S \times (S \otimes_R M) \longrightarrow S \otimes_R M$$
$$(s, x) \longmapsto ?$$

que verifique as "quatro propriedades".

Fixando $s \in S$,

definimos $\phi_s : S \times M \longrightarrow S \otimes_R M$

$$(a, m) \longmapsto sa \otimes m \,,$$

que é uma função R-bilinear.

Pela propriedade universal do produto tensorial, existe um único R-homomorfismo

$$\overline{\phi_s} : S \otimes_R M \longrightarrow S \otimes_R M \,,$$

que torna o diagrama abaixo comutativo.

$$\begin{tikzcd}
S \times M \arrow[r] \arrow[dr, "\phi_s"'] & S \otimes_R M \arrow[d, dashed, "\overline{\phi_s}"] \\
(a, m) \arrow[dr, mapsto, bend right] & S \otimes_R M \\
 & sa \otimes m \,.
\end{tikzcd}$$

Assim, $\overline{\phi_s}(a \otimes m) = sa \otimes m$,

e $\overline{\phi_s}(a_1 \otimes m_1 + \cdots + a_n \otimes m_n) = sa_1 \otimes m_1 + \cdots + sa_n \otimes m_n$,

pois $\overline{\phi_s}$ é um R-homomorfismo.

Definimos, então, a multiplicação por escalar

$$S \times (S \otimes_R M) \longrightarrow S \otimes_R M$$
$$(s, x) \longmapsto \bar{\phi}_s(x).$$

ou seja,

$$\left(s, \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes m_i)\right) \longmapsto \sum_{i=1}^{n}(sa_i \otimes m_i).$$

Verifique as "quatro propriedades", para concluir que, com esta multiplicação por escalar, $S \otimes_R M$ tem uma estrutura de S-módulo. ■

Obs.: R, S anéis comutativos.
$f : R \to S$ homomorfismo de anéis.
M, N R-módulos.
$g : M \to N$ homomorfismo de R-módulos.

Sabemos que $Id \otimes g : S \otimes_R M \longrightarrow S \otimes_R N$
$$\sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes m_i) \longmapsto \sum_{i=1}^{n}(a_i \otimes g(m_i))$$

é um homomorfismo de R-módulos.
Observe que é também um homomorfismo de S-módulos, e que se g é um isomorfismo de R módulos, então $Id \otimes g$ é um isomorfismo

de R-módulos e de S-módulos.

<u>Prop.:</u> R, S anéis comutativos.

$f : R \to S$ homom. de anéis.

M R-módulo. Então,

M R-mod. livre $\Rightarrow$ $S \otimes_R M$ S-mod. livre,

com o mesmo posto de M.

<u>Dem.:</u> $M \approx \bigoplus_{i \in I} R$. Então,

$$S \otimes_R M \approx S \otimes_R \left(\bigoplus_{i \in I} R \right) \approx \bigoplus_{i \in I} (S \otimes_R R) \approx \bigoplus_{i \in I} S$$

[isomorfismos de R-mod. e de S-mod.]. ∎

<u>Obs.:</u> R, S anéis comutativos.

$f : R \to S$ homom. de anéis.

$S \otimes_R R \approx S$, isomorfismo de R-mod. e de S-mod.

S é um S-módulo livre, com base $\{1\}$. Assim, $S \otimes_R R$ é um S-mód. livre, com base $\{1 \otimes 1\}$. Mas observe que $S \otimes_R R$ pode não ser um R-mod. livre [Ex.: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f(a) = a/1$.].

Seja agora R um domínio,
e seja K o corpo de fracções de R:

$$K = \left\{ r/s \; ; \; r \in R, \; s \in R \setminus \{0\} \right\} = R_W ,$$

onde $W = R \setminus \{0\}$.

K é um corpo.
Temos o homom. de anéis $f : R \longrightarrow K$
$r \longmapsto r/1$.

K é um R-módulo.
Seja M um R-módulo.
Sabemos que $K \otimes_R M$ é um R-módulo, e também um K-módulo, ou seja, um espaço vectorial sobre K.

Def.: $\operatorname{rank}(M) = \dim_K (K \otimes_R M)$.

Assim, rank (M) é a dimensão de $K \otimes_R M$ como espaço vectorial sobre K.

Prop.: R domínio, $K = R_W$, $W = R \setminus \{0\}$.
M R-módulo.
Seja $\alpha : M \longrightarrow K \otimes_R M$
$m \longmapsto \frac{1}{1} \otimes m$.

Então,

i) α é um R-homomorfismo.

ii) Todo o elemento de $K \otimes_R M$ é da forma $\frac{1}{d} \cdot \alpha(m)$, onde $d \in R$, $d \neq 0$, e $m \in M$.

iii) $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Tor}(M)$.

<u>Dem.</u>: i) $\alpha(m_1 + m_2) = \frac{1}{1} \otimes (m_1 + m_2) =$

$$= \left(\frac{1}{1} \otimes m_1\right) + \left(\frac{1}{1} \otimes m_2\right) = \alpha(m_1) + \alpha(m_2),$$

$\forall\, m_1, m_2 \in M$.

$\alpha(r.m) = \frac{1}{1} \otimes r.m = r.\left(\frac{1}{1} \otimes m\right) = r.\alpha(m)$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, m \in M$.

ii) $\frac{a_1}{b_1} \otimes m_1 + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \otimes m_n =$

$d := b_1 \cdots b_n$.

$$= \frac{a_1 . b_2 \cdots b_n}{d} \otimes m_1 + \cdots + \frac{a_n . b_1 \cdots b_{n-1}}{d} \otimes m_n =$$

$$= \frac{c_1}{d} \otimes m_1 + \cdots + \frac{c_n}{d} \otimes m_n =$$

$$= \frac{1}{d} \otimes c_1 . m_1 + \cdots + \frac{1}{d} \otimes c_n . m_n =$$

$$= \frac{1}{d} \otimes (\underbrace{c_1 . m_1 + \cdots + c_n . m_n}_{m}) = \frac{1}{d} \otimes m =$$

$K \otimes_R M$ é um K-mod.

$$= \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{1} \otimes m\right) = \frac{1}{d} \cdot \alpha(m).$$

iii)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rrr, bend left, "\beta"] & K \otimes_R M = R_W \otimes_R M \arrow[rr, "\sim"] & & M_W \\ m \arrow[r, mapsto] & \frac{1}{1} \otimes m = \frac{1}{1} \otimes m \arrow[rr, mapsto] & & \frac{m}{1}. \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta) =$

$= \{ m \in M : \frac{m}{1} = \frac{0}{1} \} =$

$= \{ m \in M : \exists\, r \in R \setminus \{0\} \text{ com } r.1.m = r.1.0 \} =$

$= \{ m \in M : \exists\, r \in R \setminus \{0\} \text{ com } r.m = 0 \} =$

$= \mathrm{Tor}(M)$.

<u>Definição:</u> M R-módulo.

Se $\mathrm{Tor}(M) = \{0\}$, dizemos que M é um <u>módulo livre de torção</u>.

Se $\mathrm{Tor}(M) = M$, dizemos que M é um <u>módulo de torção</u>.