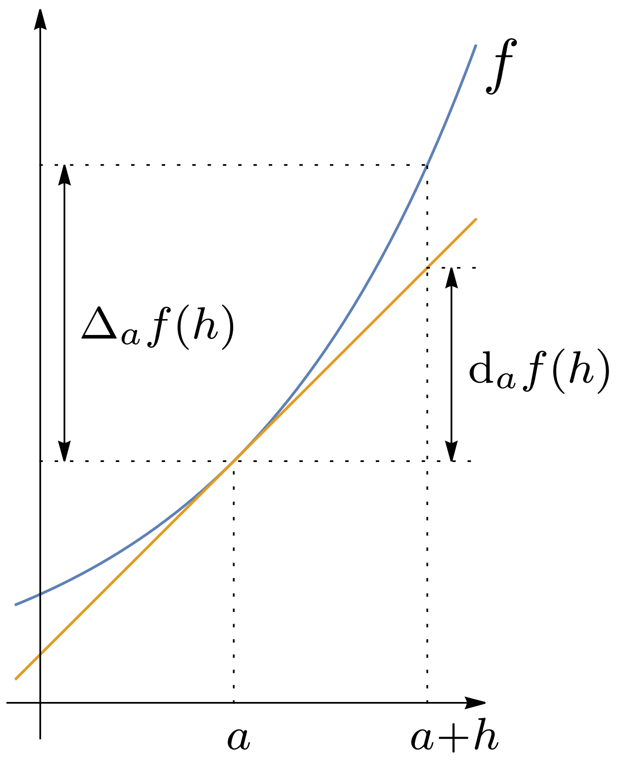
Aula de Hoje: Primitivas

Diferenciais



- Variação de f:

  $\Delta_a f(h) = f(a+h) - f(a)$
- Diferencial:

  $\mathrm{d}_a f(h) = f'(a)h$
- $\Delta_a f(h) \approx \mathrm{d}_a f(h)$ se $h \approx 0$
- $h = \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_a f(\mathrm{d}x) &= f'(a)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}f &= f'(a)\mathrm{d}x \end{aligned} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(a)$$

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \mathrm{d}y &= f'(x){\color{red}\mathrm{d}x} \end{aligned} \qquad x = g(z) \qquad \begin{aligned} y &= f\big(g(z)\big) \\ \mathrm{d}y &= f'\big(g(z)\big){\color{red}g'(z)\mathrm{d}z} \end{aligned}$$

Exemplo

- $y = 2z^2 + z^6$
- $\mathrm{d}y = (4z + 6z^5)\mathrm{d}z$
- $y = f\big(g(z)\big)$: $\quad y = f(x) = 2x + x^3 \quad$ e $\quad x = g(z) = z^2$
- $\mathrm{d}x = 2z\mathrm{d}z$
- $\mathrm{d}y = (2 + 3x^2)\mathrm{d}x = \big(2 + 3(z^2)^2\big)(2z\mathrm{d}z) = (4z + 6z^5)\mathrm{d}z$

Primitivas

Definição (Primitiva)

Uma função $G\colon A \to \mathbb{R}$ diz-se uma primitiva de f num intervalo $I \subset D_f$ se

$$G'(x) = f(x) \text{ para qualquer } x \in I.$$

f diz-se primitivável em I se existirem primitivas de f em I.

Exemplo.

- $G(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$ pois $(x^2)' = 2x$.
- $H(x) = x^2 + 1$ é também uma primitiva de $f(x) = 2x$.

Conjunto das Primitivas de f num Intervalo

Teorema

Se G e H são primitivas de f num intervalo $I \subset D_f$, então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $H(x) = G(x) + C$.

Demonstração. $H' - G' = f - f = 0$ logo $H - G$ é constante.

Se $\quad G'(x) = f(x) \quad$ então $\quad \mathrm{d}G(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$

- $\int f(x)\,\mathrm{d}x =$ conjunto das primitivas de f num intervalo
- Se $G'(x) = f(x)$, então $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \{G(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$
- É costume escrever simplesmente $\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + C$
- $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}G(x) = G(x) + C$

Exemplo. $\int 3\,\mathrm{d}x = 3x + C$

A Constante C

A constante C pode ser determinada se possuirmos informação adicional acerca da função $G(x)$.

Exemplo. Uma partícula move-se ao longo duma recta com velocidade $v(t) = 2t$. Sabendo que para $t = 1$ a partícula se encontra no ponto $x = 2$, determinar a trajectória $x(t)$.

- $x'(t) = v(t)$ logo $x(t) = \int 2t \, \mathrm{d}t = t^2 + C$.
- Tomando $t = 1$ temos $x(1) = 2 = 1^2 + C$
- $C = 1$
- Assim $x(t) = t^2 + 1$.

Primitivas de x^a

$$\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

Exemplo. Vamos calcular $\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$:

$$\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int x^{-2} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Exemplo. Determinar todas as funções G tais que $G'(x) = \frac{1}{x^2}$.
Temos $\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$ em cada intervalo, logo:

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + C_1 & \text{se } x > 0 \\ -\frac{1}{x} + C_2 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Linearidade

Teorema

- $$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$
- $$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Demonstração. Se $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$ então

- $\big(F(x) + G(x)\big)' = f(x) + g(x)$
- $\big(aF(x)\big)' = af(x)$

Exemplo.

$$\int x^3 + \frac{5}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 5\Big(-\frac{1}{x}\Big) + C$$

Primitivas e a Regra da Cadeia

$$\int f'(x)f(x)^a \, \mathrm{d}x = \frac{f(x)^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1)$$

Exemplo. Calcular $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x.$

Temos $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = 1 + x^2$, $f'(x) = 2x$

$$\int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + C$$

Assim $\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$

Mudança de Variável

Teorema

- Se g é diferenciável num intervalo I, e
- f é primitivável em $g(I)$, então:

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (x \in I)$$

em que está subentendida a substituição de y por $g(x)$.

Demonstração. Se F é uma primitiva de f então

$$F'(y) = f(y) \quad \text{e} \quad (F \circ g)'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x),$$

logo

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = F(y) + C \quad \text{e} \quad \int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + C$$

Exemplo

Ao fazer uma mudança de variável temos 3 passos:

1. Substituir, no integral original, $g(x)$ por y e $g'(x)\,\mathrm{d}x$ por $\mathrm{d}y$;
2. Primitivar a função resultante (em que a variável é y);
3. Substituir de novo y por $g(x)$.

Exemplo. Calcular $\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Tomamos $y = 1 + x^2$, $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$.

1. Substituimos: $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{y}\,\frac{1}{2}\mathrm{d}y$
2. Calculamos: $\displaystyle\int \sqrt{y}\,\frac{1}{2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int y^{1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\frac{y^{3/2}}{3/2} + C$
3. Substituimos: $\frac{1}{3}y^{3/2} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$