**6ª LISTA DE EXERCÍCIOS**

**Fundamentos de Álgebra - LMAC e MMA**

**1º semestre 2020/2021**

**Problema 1.** Seja $R$ um anel comutativo e seja $W$ um conjunto multiplicativamente fechado de $R$. Mostre que

**a)** Se $f : N \longrightarrow M$ é um homomorfismo de $R$-módulos, então $f_W : N_W \longrightarrow M_W$ é um homomorfismo de $R$-módulos e de $R_W$-módulos, onde

$$f_W(\frac{n}{t}) = \frac{f(n)}{t} .$$

**b)** Se $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ é uma sequencia exacta de $R$-módulos e $R$-homomorfismos, então

$$0 \longrightarrow N_W \xrightarrow{f_W} M_W \xrightarrow{g_W} P_W \longrightarrow 0$$

também é exacta (sobre $R$ e sobre $R_W$).

**Problema 2.** Sejam $R$ um anel comutativo, $M$ um $R$-módulo, $N$ um $R$-submódulo de $M$, e $W$ um conjunto multiplicativamente fechado de $R$. Mostre que:

**a)** $R_W \otimes_R M \cong M_W$ (isomorfismo de $R$-módulos e de $R_W$-módulos);

**b)** $R_W$ é um $R$-módulo flat;

**c)** $(M/N)_W \cong M_W/N_W$.

**Problema 3.** Sejam $R$ um anel comutativo, $W$ um conjunto multiplicativamente fechado de $R$, $M_1$ e $M_2$ $R$-módulos, e $N$ e $P$ $R$-submódulos de $M_1$. Mostre que:

**a)** $(N + P)_W = N_W + P_W$

**b)** $(N \cap P)_W = N_W \cap P_W$

**c)** $(M_1 \oplus M_2)_W \cong (M_1)_W \oplus (M_2)_W$ (isomorfismo de $R_W$-módulos).

**Problema 4.** Seja $R$ um anel comutativo e seja $W$ um conjunto multiplica tivamente fechado de $R$. Mostre os seguintes factos:

**i)** Há uma correspondencia biunívoca entre os ideais primos, $Q$, de $R$, tais que $Q \cap W = \emptyset$, e os ideais primos de $R_W$.

**ii)** No caso em que $W = R - P$ ($P$ ideal primo de $R$), usamos a notação $R_P$ para indicar $R_W$.
Neste caso, há uma correspondencia biunívoca entre os ideais primos, $Q$, de $R$, tais que $Q \subseteq P$, e os ideais primos de $R_P$.

**iii)** $R_P$ tem um único ideal maximal, $P_P$.