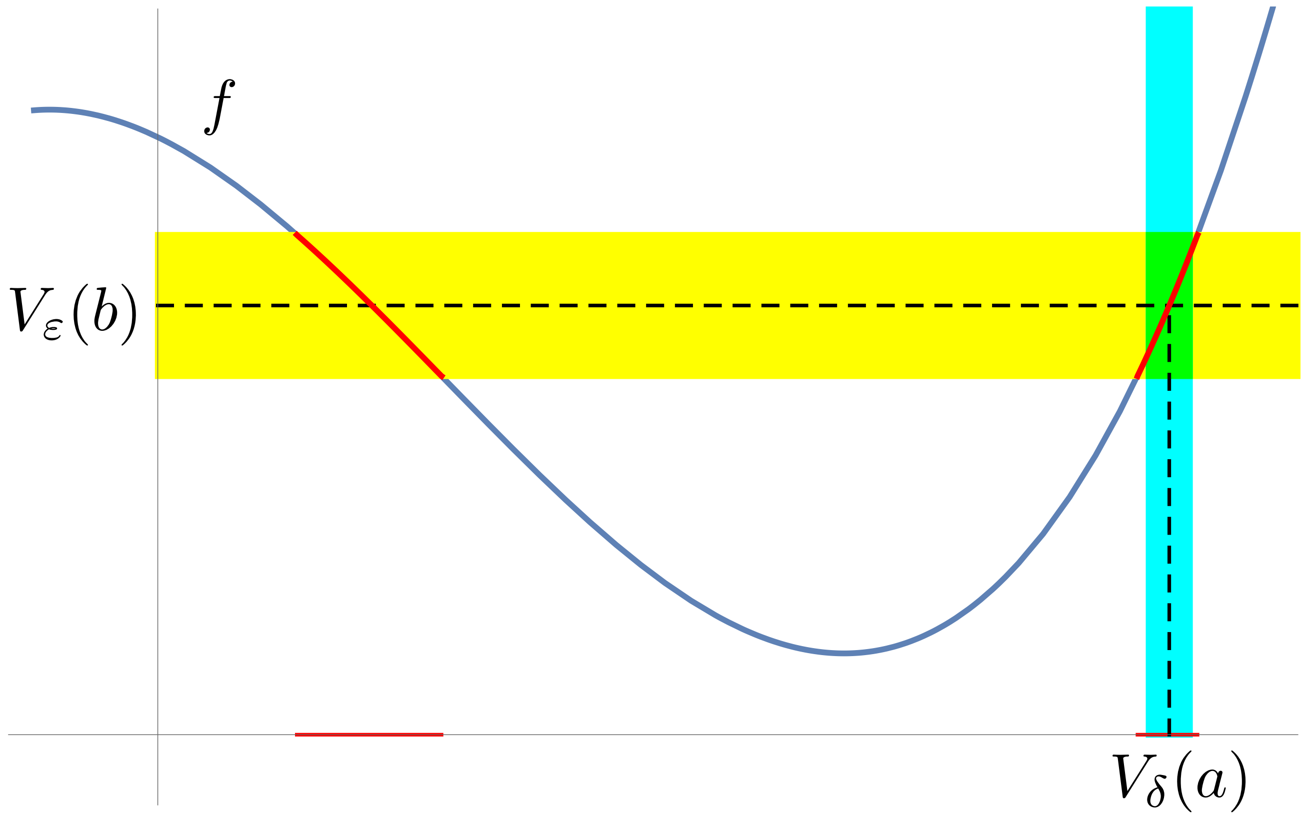
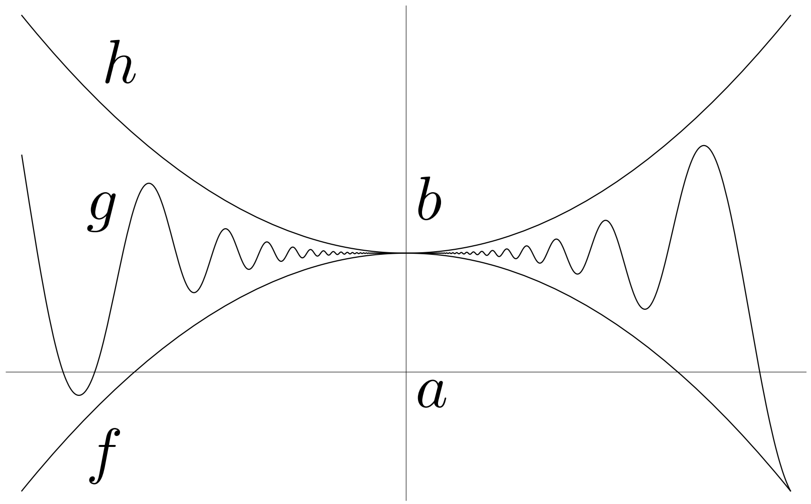
Definição de Limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow \ f(x) \in V_\varepsilon(b)$$



Limites Enquadrados



Princípio dos Limites Enquadrados

- Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ numa viz. $V_\delta(a)$, e
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$

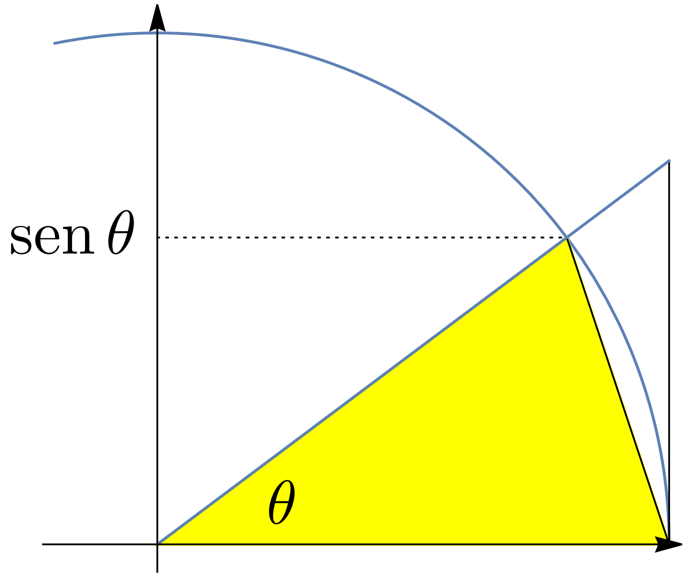
então $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

Ideia da Demonstração. Dado um $\varepsilon > 0$

- Existe uma viz. $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x), h(x) \in V_\varepsilon(b)$
- $f(x), h(x) \in V_\varepsilon(b) \;\Rightarrow\; g(x) \in V_\varepsilon(b)$

O Limite de $\operatorname{sen}(\theta)/\theta$ na Origem

Teorema. $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

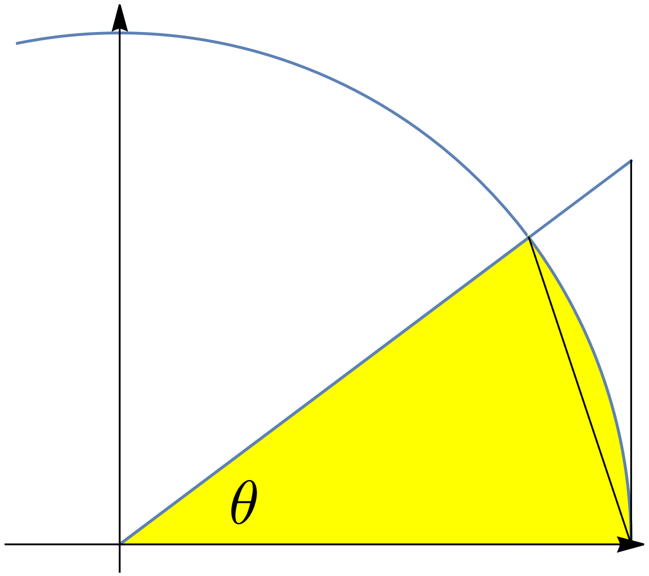


Para $0 < \theta < \pi/2$

$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$

O Limite de $\operatorname{sen}(\theta)/\theta$ na Origem

Teorema. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$

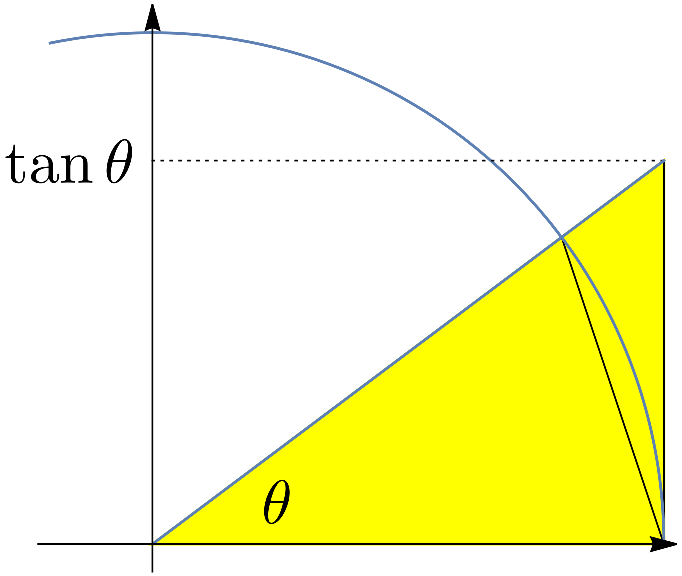


Para $0 < \theta < \pi/2$

$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \frac{1}{2}\theta$

O Limite de $\operatorname{sen}(\theta)/\theta$ na Origem

Teorema. $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

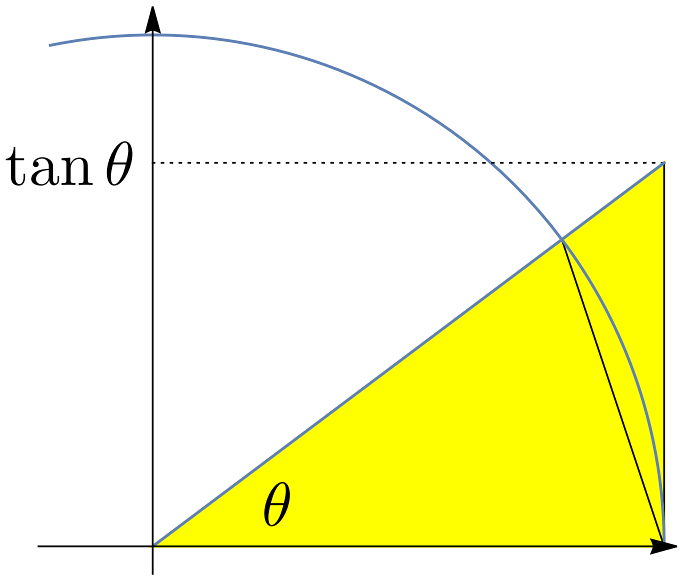


Para $0 < \theta < \pi/2$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta < \tfrac{1}{2}\theta < \tfrac{1}{2}\tan\theta$$

O Limite de $\mathrm{sen}(\theta)/\theta$ na Origem

Teorema. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$



Para $0<\theta<\pi/2$

$$\operatorname{sen}\theta < \theta < \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} > \cos\theta \quad \left(\theta\in \overset{\circ}{V}_{\pi/2}(0)\right)$$

Princípio dos Limites Enquadrados: $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}=1$

Limite da soma

Teorema

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = b+c$$

Definição de Limite: $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = b+c$ sse

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ b+c-\varepsilon < f(x)+g(x) < b+c+\varepsilon$$

Demonstração do Teorema. Dado $\varepsilon > 0$

- $f(x) \to b$: existe $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $b-\frac{\varepsilon}{2} < f(x) < b+\frac{\varepsilon}{2}$
- $g(x) \to c$: existe $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $c-\frac{\varepsilon}{2} < g(x) < c+\frac{\varepsilon}{2}$
- Somando obtemos, para qualquer $x \in V_\delta(a)$:

$$b+c-\varepsilon < f(x)+g(x) < b+c+\varepsilon \qquad \square$$

Infinitésimos

Uma função $f(x)$ diz-se um infinitésimo em a se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

Teorema

- Se $f(x)$ é um infinitésimo em a, e
- $g(x)$ é limitada numa vizinhança $V_\delta(a)$,

então $f(x)g(x)$ é um infinitésimo em a.

Dem. A provar: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \Rightarrow |f(x)g(x)| < \varepsilon$

- g é limitada: existe M tal que $|g(x)| \leqslant M$ para $x \in V_\delta(a)$
- $f(x) \to 0$ logo $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ numa vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$
- $|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}|g(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$

Exemplo

Função de Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0; \\ 1, & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$

O limite $\lim_{x\to 0} H(x)$ não existe.

Vamos calcular $\lim_{x\to 0} x\,H(x)$.

- $H(x)$ é limitada: $0 \leqslant H(x) \leqslant 1$.
- x é um infinitésimo pois $\lim_{x\to 0} x = 0$.

Logo $\lim_{x\to 0} x\,H(x) = 0$.

Limite do Produto e do Quociente

Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$ então

- $\lim_{x \to a} \big(f(x)g(x)\big) = bc$
- para $c \neq 0$, $\quad \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$

Demonstração (Produto).

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(x)g(x) - b\,g(x) + b\,g(x) - bc + bc \\ &= \big(f(x) - b\big)g(x) + b\big(g(x) - c\big) + bc \end{aligned}$$

$f(x) - b$ e $g(x) - c$ são infinitésimos e $g(x)$ é limitada numa vizinhança de a logo $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0 + 0 + bc = bc$

Linearidade

Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem e $b, c \in \mathbb{R}$ então

$$\lim_{x\to a}\big(b\,f(x)+c\,g(x)\big) = b\lim_{x\to a} f(x) + c\lim_{x\to a} g(x)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\big(b\,f(x)+c\,g(x)\big) &= \lim_{x\to a}\big(b\,f(x)\big) + \lim_{x\to a}\big(c\,g(x)\big)\\
&= \lim_{x\to a} b \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} c \lim_{x\to a} g(x)\\
&= b\lim_{x\to a} f(x) + c\lim_{x\to a} g(x)
\end{aligned}$$

Exemplo. $\lim_{x\to 0}\left(2\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 3x\right) = 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} + 3\lim_{x\to 0} x = 2$

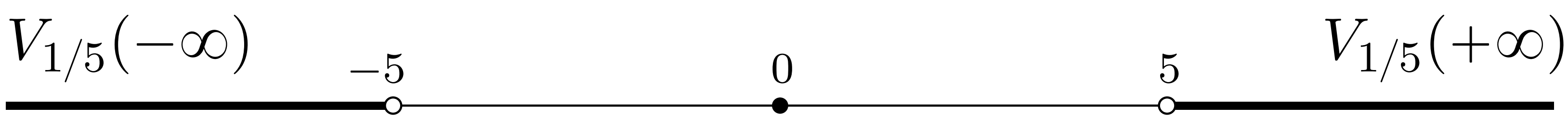
Vizinhanças do infinito

Recordemos as definições:

- a é ponto de acumulação de D sse $\displaystyle\forall_{\delta>0}\ \mathring{V}_\delta(a) \cap D \neq \varnothing$
- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{sse} \quad \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ x \in \mathring{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ f(x) \in V_\varepsilon(b)$

Para generalizar as definições ao caso $a, b = \pm\infty$ basta definir:

- $\mathring{V}_r(+\infty) = V_r(+\infty) =]1/r, +\infty[$
- $\mathring{V}_r(-\infty) = V_r(-\infty) =]-\infty, -1/r[$



Limites de Sucessões

- Uma sucessão é uma função com domínio $\mathbb{N}$
- O único ponto de acumulação de $\mathbb{N}$ é $a = +\infty$:

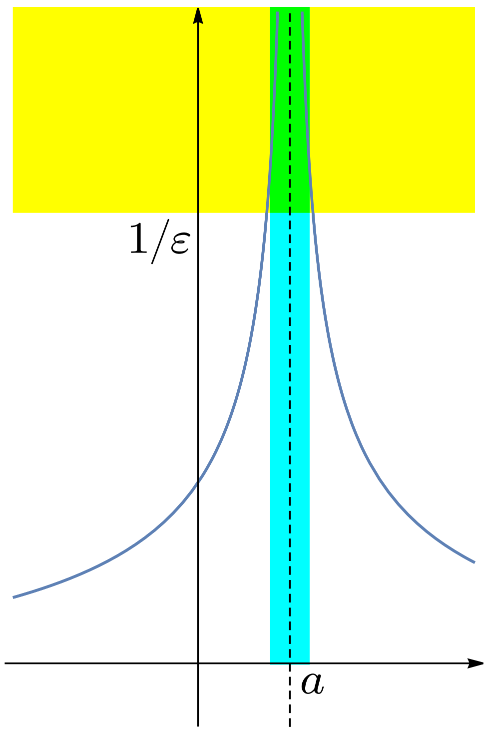
$$\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(+\infty) \cap \mathbb{N} = \left]1/\delta, +\infty\right[\cap \mathbb{N} \neq \emptyset$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ significa:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ n \in \overset{\circ}{V}_\delta(+\infty) \ \Rightarrow\ x_n \in V_\varepsilon(b)$$

Interpretação Geométrica

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$