Funções

Para definir uma função f é necessário:

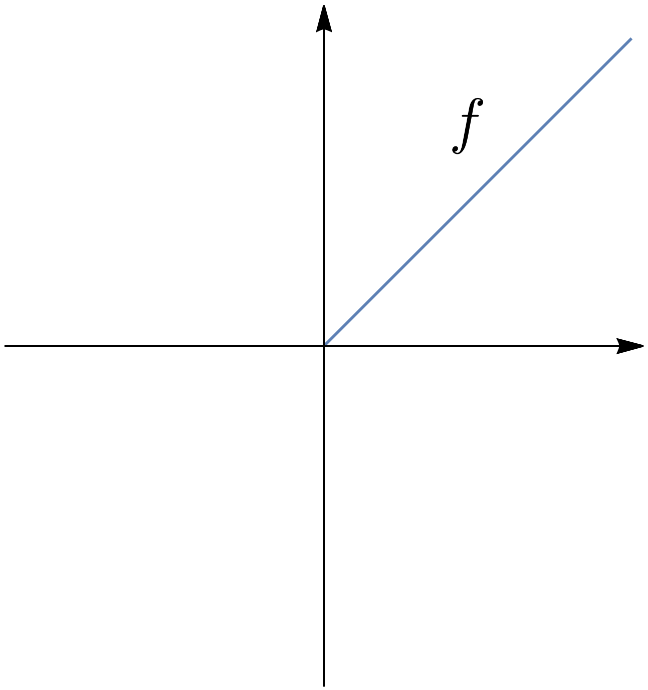
- um conjunto D_f, o domínio, e
- uma escolha, para cada $x \in D_f$, dum número real $f(x)$.

Exemplo. Uma sucessão é uma função com domínio $\mathbb{N}$:

$$x_1 = f(1), \quad x_2 = f(2), \quad x_3 = f(3), \quad \dots$$

Alteração do Domínio

$f(x) = (\sqrt{x}\,)^2$



Definição

- A *restrição* de f a um conjunto $B \subset D_f$, é a função $f|_B$ com domínio B tal que $f|_B(x) = f(x)$ para todo o $x \in B$.
- Dado $A \supset D_f$, uma função $g\colon A \to \mathbb{R}$ diz-se um *prolongamento* de f a A se $g(x) = f(x)$ para todo o $x \in D_f$.

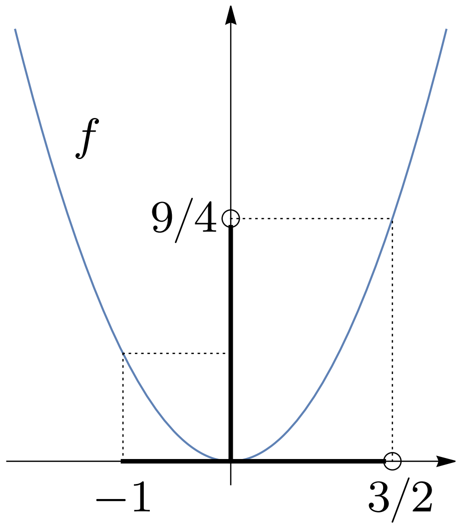
Exemplo. $f(x) = (\sqrt{x}\,)^2$. As funções $g(x) = x$ e $h(x) = |x|$ são prolongamentos de f a $\mathbb{R}$.

Imagem dum Conjunto por uma Função

Definição

Dada uma função f e um conjunto $A \subset D_f$:

- $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ (valores de f em A)
- $f(D_f) = D'_f$ é o *contradomínio* de f.



Exemplo. $f(x) = x^2$, $A = [-1, 3/2[$

- $f(A) = [0, 9/4[$.

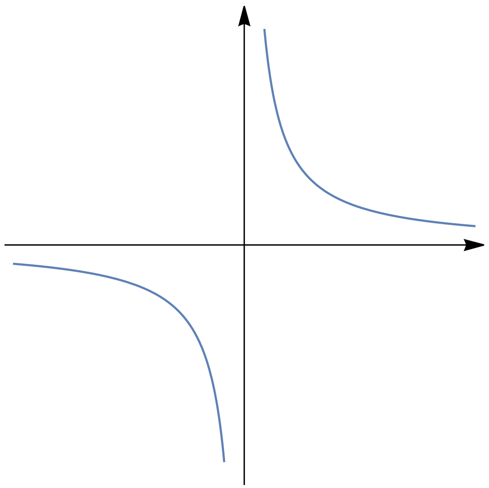
Monotonia

Definição

Se para quaisquer $y > x$, com $x, y \in A$,

- $f(y) > f(x)$ então f diz-se *estritamente crescente* em A
- $f(y) < f(x)$ então f diz-se *estritamente decrescente* em A
- $f(y) \neq f(x)$ então f diz-se *injectiva* em A

f diz-se estritamente monótona se for estritamente crescente ou decrescente. Note que f é então injectiva.



Exemplo. A função $f(x) = 1/x$ é

- estritamente decrescente em $]0, +\infty[$
- estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$
- injectiva mas não monótona em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Monotonia

Definição

Se para quaisquer $y \geqslant x$, com $x, y \in A$,

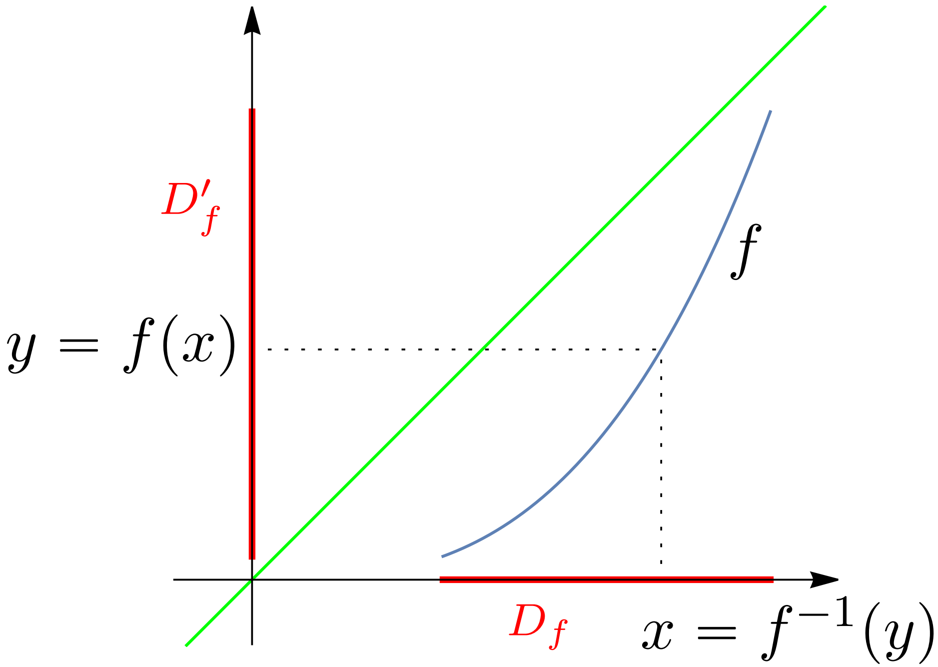
- $f(y) \geqslant f(x)$ então f diz-se *crescente* em A
- $f(y) \leqslant f(x)$ então f diz-se *decrescente* em A

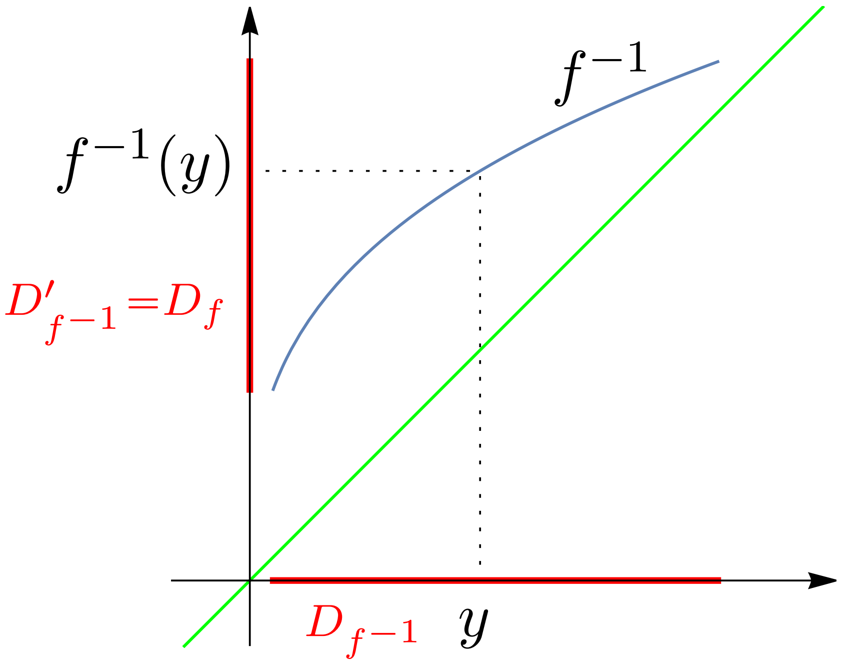
Funções inversas.

Definição

Seja f injectiva. A função inversa de f é a função f^{-1}

- com domínio $D_{f^{-1}} = D'_f$,
- e $f^{-1}(y)$ definido por: $x = f^{-1}(y) \;\Leftrightarrow\; f(x) = y \quad (y \in D'_f)$.





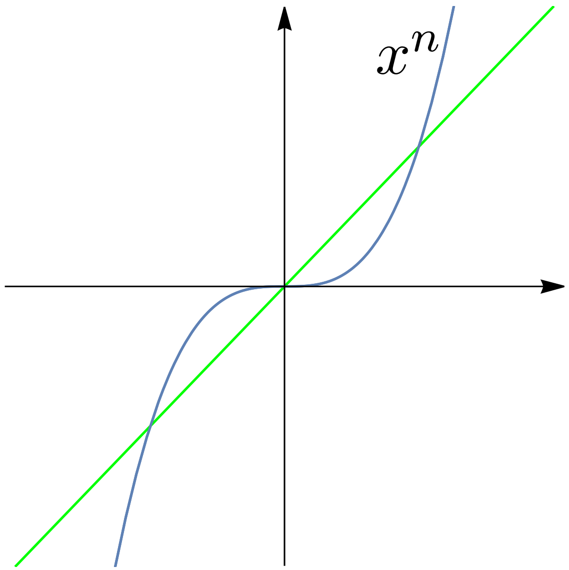
A Função Raiz Índice n (n ímpar)

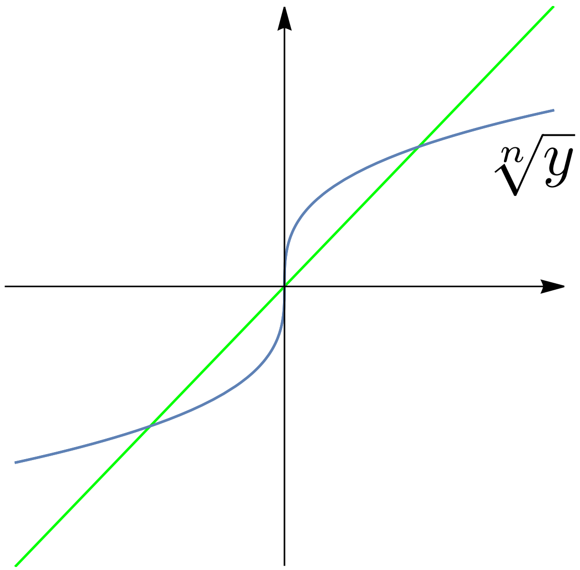
Para $n \in \mathbb{N}$ ímpar, $f(x) = x^n$ é injectiva.

Definição

$f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ é a função inversa de $f(x) = x^n$:

$$x = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow y = x^n$$





- $\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y$
- $\sqrt[n]{x^n} = x$

A Função Raiz Índice n (n par)

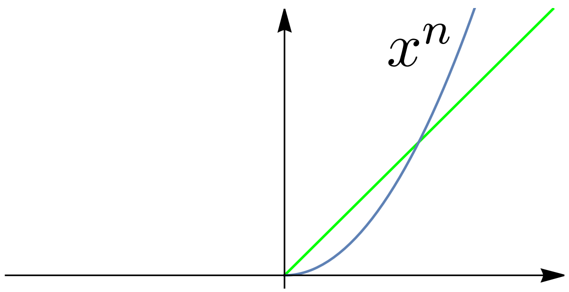
Para $n \in \mathbb{N}$ par, $f(x) = x^n$ não é injectiva.

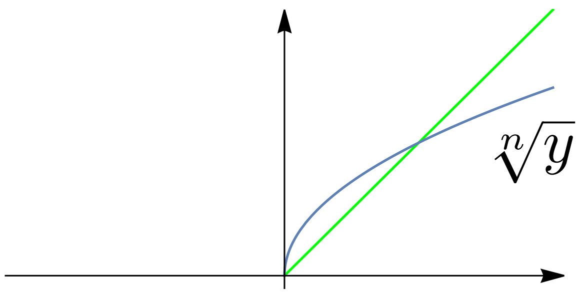
Definição

$\sqrt[n]{y}$ é a função inversa da restrição de $f(x) = x^n$ a $[0, +\infty[$:

$$x = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow \left(y = x^n \quad \text{e} \quad x \geqslant 0\right)$$

$$\left(x = -\sqrt[n]{y} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[n]{y}\right) \Leftrightarrow y = x^n$$



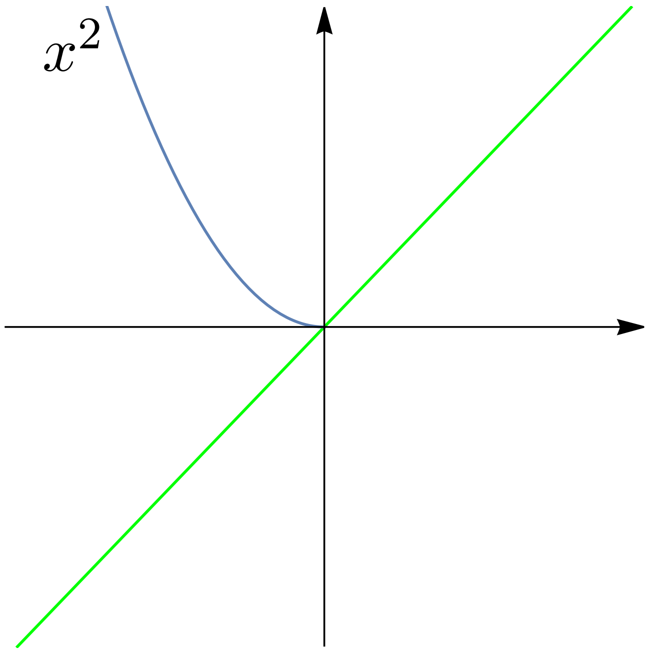


- $\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y$
- $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

Questão

Qual a função inversa da restrição de $f(x) = x^2$ a $]-\infty, 0]$?

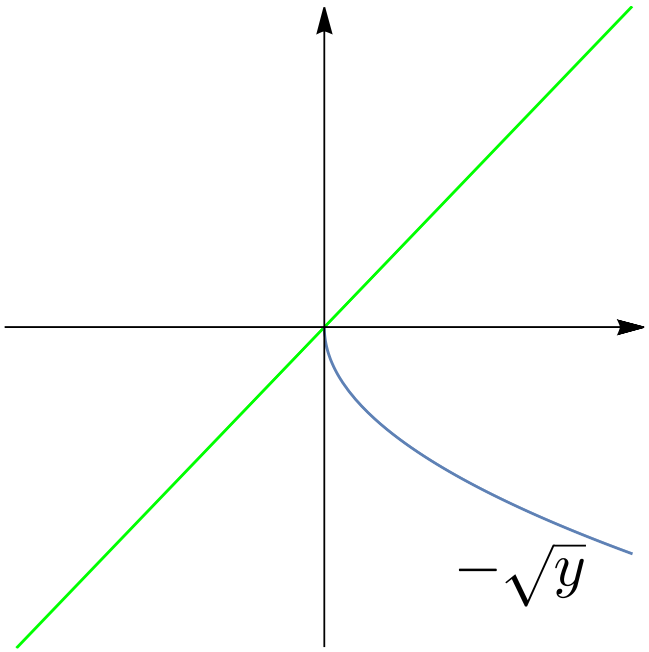
- $y = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$
- $x \in\,]-\infty, 0]$ logo $x = -\sqrt{y}$



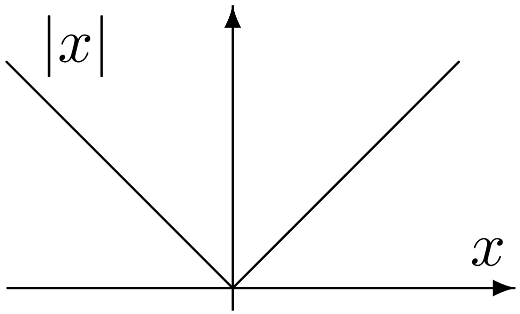
Questão

Qual a função inversa da restrição de $f(x) = x^2$ a $]-\infty, 0]$?

- $y = x^2 \iff x = \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y}$
- $x \in\,]-\infty, 0] \quad \text{logo} \quad x = -\sqrt{y}$



Módulo e Distância



Definição

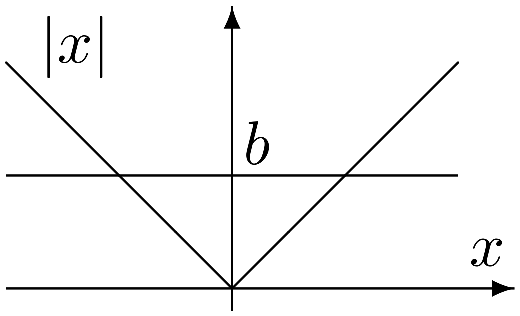
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Definição (Distância)

A distância entre dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\text{distância} = |x - y|\,.$$

Propriedades do Módulo



Teorema

- $|x| \leqslant b \;\Leftrightarrow\; x \leqslant b \quad \text{e} \quad x \geqslant -b$
- $|x| \geqslant b \;\Leftrightarrow\; x \geqslant b \quad \text{ou} \quad x \geqslant -b$
- $|x| = b \;\Leftrightarrow\; x = \pm b \quad (b \geqslant 0)$

Exemplo.

$$\begin{aligned} |x-2| > 2x &\Leftrightarrow x - 2 > 2x \quad \text{ou} \quad x - 2 < -2x \\ &\Leftrightarrow x < -2 \qquad\quad \text{ou} \quad 3x < 2 \\ &\Leftrightarrow x < 2/3 \end{aligned}$$

Teorema (Desigualdade Triangular)

$|a+b| \leqslant |a| + |b|$

Demonstração.

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \;\Leftrightarrow\; -|a| - |b| \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$