Limites. Funções Contínuas

Para o cálculo de limites é útil saber a definição, as propriedades dos limites, os limites notáveis em $\mathbb{R}$.

Exemplo: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$

Usando as propriedades deparamo-nos com uma indeterminação $\frac{0}{0}$.

Fazendo $y=0$, tem-se

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{\operatorname{sen}(x)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Portanto, se o limite existir deverá ser zero.

Sabendo que $|\operatorname{sen}(x)| \leq 1$, tem-se

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

Esta desigualdade não ajuda nada a determinar se o limite de facto existe e é zero ou se não existe.

Mas, sabendo que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$,

tem-se:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

?

Resta ver o que se passa com a expressão:

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1}|y| \leq |y| \longrightarrow 0$$

Assim, tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)\, y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad !!!$$

—— | —————

<u>Exemplo</u>: $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} = ?$$

Fazendo $x=0$ ou $y=0$, conclui-se que o limite, se existir, deverá ser zero.

Este é novamente um caso de indeterminação $\frac{0}{0}$.

Note-se que as expressões

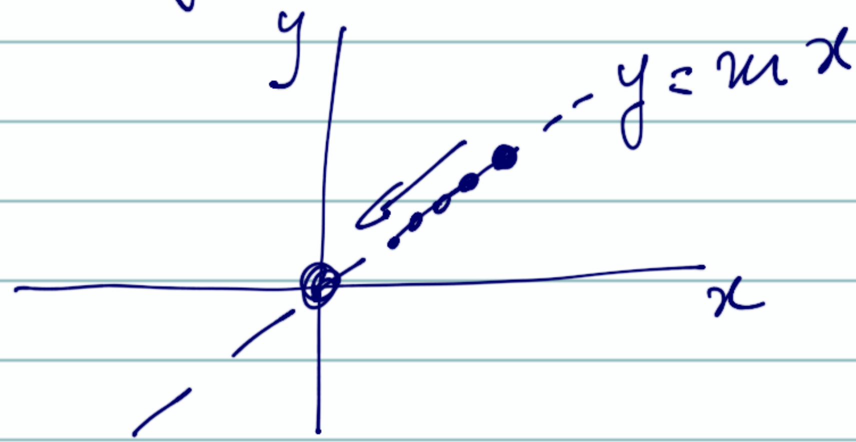
$$\left|\frac{x^3}{x^6+y^2}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\frac{y}{x^6+y^2}\right|$$

"indicam" que o limite poderá não

existir!!! Basta fazer $y=0$ na primeira ou $x=0$ na segunda.

Portanto, deveremos tentar "encontrar" dois candidatos a limite. Um deles é zero fazendo $y=0$ ou $x=0$.

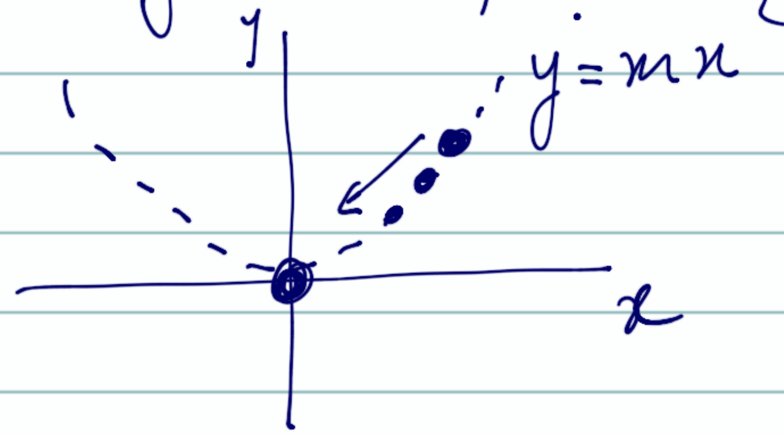
Fazendo $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$,



tem-se $\quad \dfrac{x^3 mx}{x^6+m^2x^2} = \dfrac{mx^4}{x^6+m^2x^2} = \dfrac{mx^2}{x^4+m^2} \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0$

Nesta tentativa não foi possível obter um candidato não nulo.

Fazendo $y = mx^2$, $m \in \mathbb{R}$:

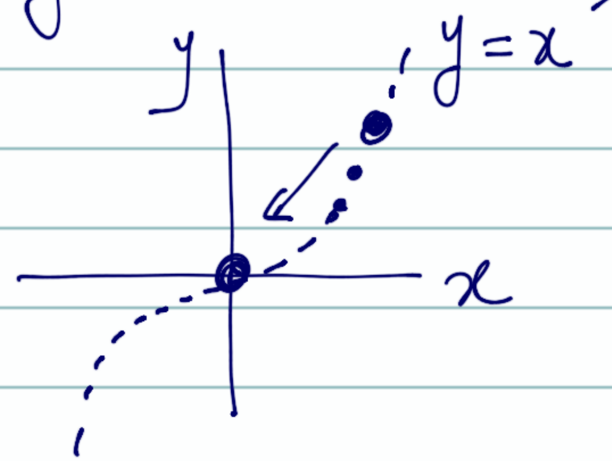


tem-se

$$\frac{x^3 m x^2}{x^6 + m^2 x^4} = \frac{m x}{x^2 + m^2} \xrightarrow[(x \to 0)]{} 0$$

Novamente, esta tentativa também não ajuda.

Fazendo $y = x^3$



tem-se

$$\frac{x^3\,x^3}{x^6+x^6} = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2} \neq 0 \;!!!$$

Finalmente tem-se um segundo candidato $\frac{1}{2} \neq 0$.

Portanto, o limite não existe porque se existisse seria único!.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} \text{ não existe!}$$

— // —

<u>Exemplo:</u> $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^6} = ?$

Fazendo $x=0$ ou $y=0$, é claro que o limite, a existir, deverá ser zero.

Neste caso, tem-se x^3 no numerador e x^2+y^6 no denominador.

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^6}\right| = \frac{|x|\,|y|\,x^2}{x^2+y^6} \le |x|\,|y| \to 0 \;!$$

≤ 1 !!! ($x^2 \le x^2+y^6$)

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^6} = 0 \;!$$

Assim, a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$!!!

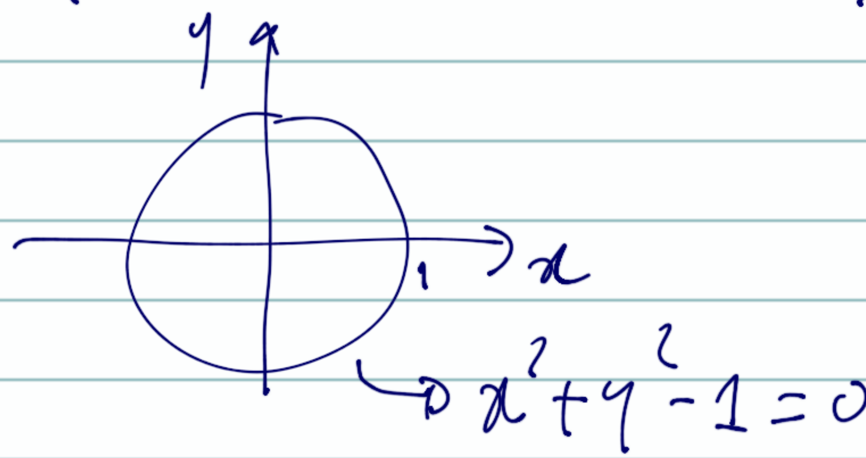
Funções Contínuas. Conjuntos fechados

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, contínua, seja A o conjunto definido por

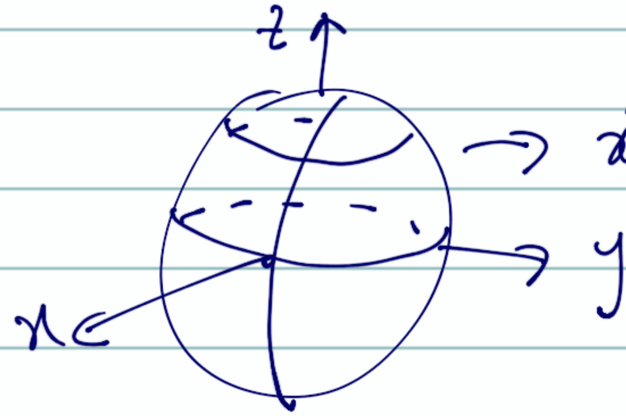
$$A = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0 \}.$$

Exemplos:

1 – $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$



2 - $A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1 \}$



$\to x^2+y^2+z^2-1=0.$

etc.

— " —

Ao conjunto A chama-se <u>conjunto de nível</u> zero de f.

— " —

Seja $A = \{ x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geqslant 0 \}$.

$\boxed{\text{O conjunto A é FECHADO.}}$!!!

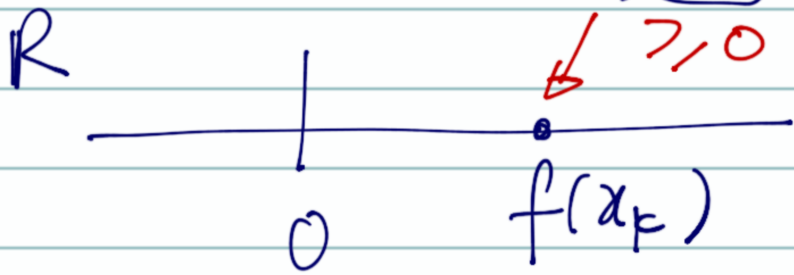
Seja (x_k) uma sucessão em A e convergente:

$A \ni x_k \longrightarrow a$ quando $k \to \infty$.

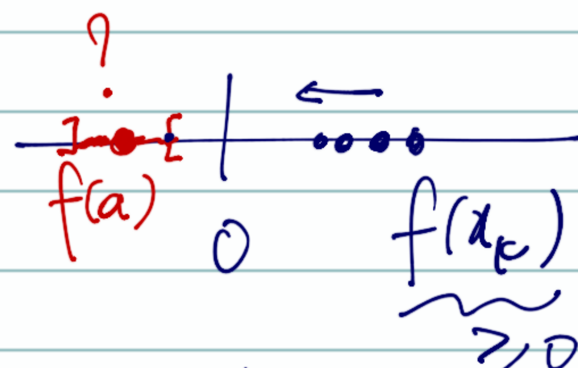
Se $a \in A$ então A é fechado!

Dado que f é contínua, então

se $x_k \to a \implies \underbrace{f(x_k)}_{\geq 0} \to f(a)$



Se $f(a)$ fosse negativo, $f(a) < 0$,



seria absurdo porque existiria $\varepsilon > 0$ tal que $f(a) + \varepsilon < 0$ e existiria uma ordem k_0 tal que para $k > k_0$

$$f(a)-\varepsilon < f(x_k) < f(a)+\varepsilon < 0$$

— // —

Relembre-se que dada $A \subset \mathbb{R}^n$,

$\mathbb{R}^n = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{ext}(A)$.

Sendo A fechado, $A = \bar{A} =$

$= \text{int}(A) \cup \partial A$,

$\mathbb{R}^n = A \cup \text{ext}(A)$, ou seja,

o complementar de A é $\text{ext}(A)$.

É claro que tanto $\text{int}(A)$ como $\text{ext}(A)$ são conjuntos abertos.

Assim, o complementar de um

conjunto fechado é aberto e vice-versa.

— // —

Sendo $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$, com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua, um conjunto fechado, então

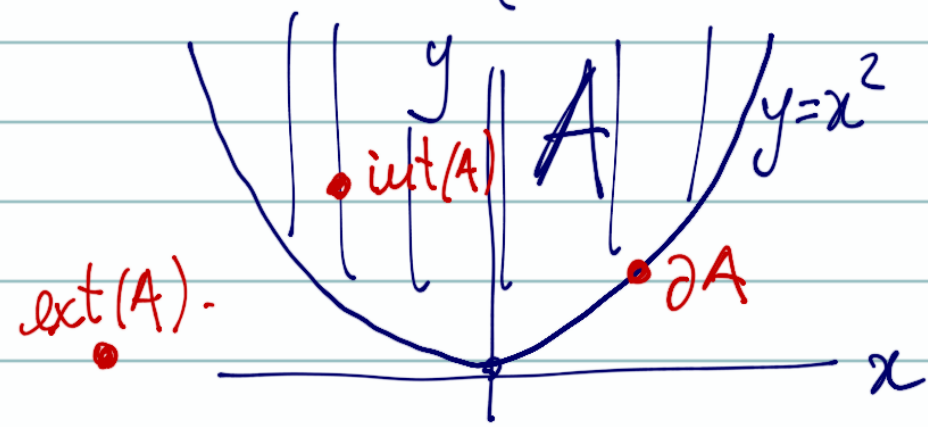
$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}$$

é um conjunto aberto!

Do mesmo modo se conclui que $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$ é aberto.

Portanto, a fronteira de A é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$!!!

Exemplo: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$



$$\mathrm{int}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$$

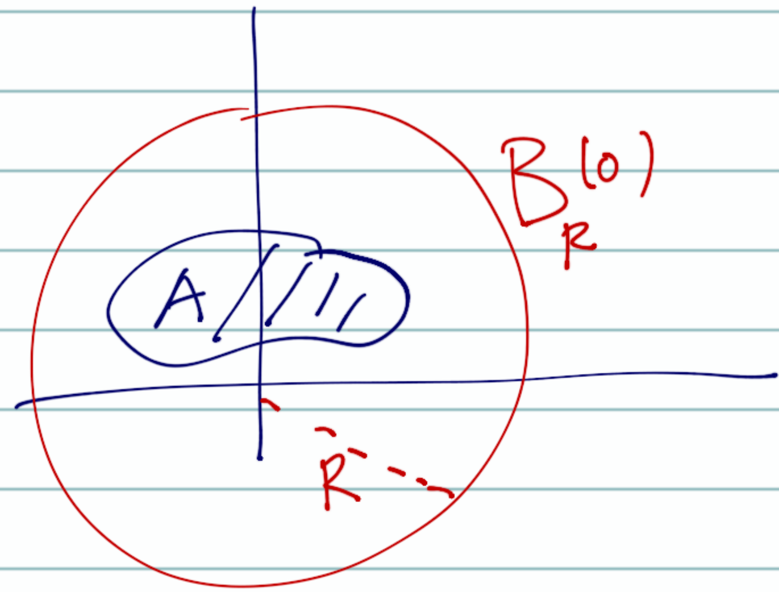
$$\mathrm{ext}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$$

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

— " —

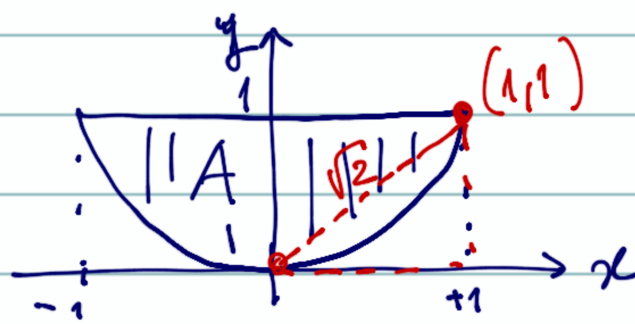
Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é **limitado** se existir uma bola (pode ser centrada na origem) $B_R(0)$ que contém A,

$$\exists_{R>0} : A \subset B_R(0).$$



Diz-se que $A \subset \mathbb{R}^n$ é $\boxed{\text{compacto}}$ se for <u>limitado</u> e <u>fechado</u>.

<u>Exemplo</u>: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\}$



A é fechado porque contém a fronteira e é limitado porque está contido numa bola de raio maior que $\sqrt{2}$.

Portanto, A é compacto.

"