5 SÉRIES

5.1 Séries Numéricas

1. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n!}, \qquad \text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^4-1},$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}, \qquad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1-2^n}, \qquad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n,$$

$$\text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}, \qquad \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}, \qquad \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3},$$

$$\text{j) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}}, \qquad \text{k) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}, \qquad \text{l) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!},$$

$$\text{m) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}, \qquad \text{n) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, \qquad \text{o) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1},$$

$$\text{p) } \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}, \qquad \text{q) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}, \qquad \text{r) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

RESOLUÇÃO

NOTA: uma série de termos não negativos converge se e só se converge absolutamente (já que $a_n = |a_n|$).

a) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparemos com a série $\sum \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ a qual é divergente. Como,

$$\lim \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = 1 \neq 0, +\infty, \qquad \text{(verifique)}$$

concluimos que a série dada e a série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ têm a mesma natureza. Logo a série dada é divergente, já que é uma série de Dirichlet da forma $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ com $\alpha = 1/2 < 1$.

b) Trata-se de uma série de termos não negativos. Usando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}}{\frac{2^n}{n^2+n!}} = \frac{2(n^2+n!)}{(n+1)^2+(n+1)!} = 2\frac{n!}{(n+1)!}\frac{\frac{n^2}{n!}+1}{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}+1} \to 2\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Como este limite é menor que 1, concluimos que a série dada é (absolutamente) convergente.

c) Procedendo como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n^3}$. Logo, é (absolutamente) convergente.

d) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

e) Como $\frac{1+2^n}{1-2^n} = \frac{2^{-n}+1}{2^{-n}-1} \to -1 \neq 0$, concluimos que a série é divergente.

f) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério da raiz (ou de Cauchy):

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n} = \frac{n}{2n+\sqrt{n}} = \frac{1}{2+n^{-\frac{1}{2}}} \to \frac{1}{2}.$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

g) (Comece por reparar que, contrariamente a e), a sucessão do termo geral desta série converge para 0 o que não nos permite tirar qualquer conclusão sobre a convergência ou divergência da série.)

Tratando-se de uma série de termos não negativos, podemos tentar usar o critério de d'Alembert:

$$\frac{\frac{1+2^{n+2}}{1+3^{n+1}}}{\frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}} = \frac{1+2^{n+2}}{1+2^{n+1}}\frac{1+3^n}{1+3^{n+1}} = \frac{2^{-(n+1)}+2}{2^{-(n+1)}+1}\frac{3^{-n}+1}{3^{-n}+3} \to \frac{2}{3}.$$

Como este limite é inferior a 1 a série é (absolutamente) convergente.

(Alternativamente: usar o critério geral de comparação com $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$.)

h) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

Como este limite é superior a 1 concluimos que a série é divergente.

i) Como em h), neste caso a série converge.

j) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n}$. Logo, é divergente.

k) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Logo, é divergente.

l) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{(1000)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(1000)^n}{n!}} = \lim 1000 \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Como este limite é inferior a 1, a série é (absolutamente) convergente.

m) Repare-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ é uma série de termos não negativos, já que $n < 2^n$ e $n^2 < 3^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (por indução)[1],
Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{n+1-2^{n+1}}{(n+1)^2-3^{n+1}}}{\frac{n-2^n}{n^2-3^n}} = \frac{2}{3} < 1$$

(verifique), logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ converge (absolutamente) .

n) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1.$$

Logo, a série é (absolutamente) convergente.

o) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \operatorname{arctg} n \frac{n^2}{n^2-1} \to \frac{\pi}{2} \neq 0, \infty.$$

Logo, as séries têm a mesma natureza, ou seja, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$ é (absolutamente) convergente.

p) Temos

$$\lim n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Como o termo geral não converge para 0, a série diverge.

q) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0, \infty.$$

Do critério geral de comparação, as séries têm a mesma natureza, ou seja, convergem (absolutamente).

r) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série divergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\ln n} \to +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do critério geral de comparação, a série diverge.

2. a) Justifique que se f é uma função real tal que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão $a_n \geq 0$ com $a_n \to 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Determine a natureza das séries seguintes, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

RESOLUÇÃO

a) Para $a_n \geq 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ são de termos não negativos, já que se $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0$, então $f(x) > 0$ em $]0, a[$ para algum $a > 0$, logo $f(a_n) > 0$. Como $a_n \to 0^+$, tem-se

$$\lim \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0.$$

Como $L \neq 0, +\infty$, segue do critério geral de comparação que $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Segue directamente de a), notando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

que as séries dadas convergem se e só se $\alpha > 1$, por comparação com as séries de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+n}{n}\right)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{3000}}{3^n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$, d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

RESOLUÇÃO

a) O termo geral da série é uma sucessão divergente já que possui dois sublimites diferentes: 1 e -1. Logo, como o termo geral da série não tende para 0 concluimos que a série é divergente.

b) (Comece por observar que, contrariamente ao caso anterior, a sucessão do termo geral da série converge para 0 o que não nos permite tirar nenhuma conclusão sobre a convergência da série. Observe igualmente que não se trata de uma série de termos não negativos pelo que os critérios anteriormente usados para esse tipo de séries (comparação, d'Alembert, Cauchy) não podem ser directamente aplicados aqui).
Estudemos a série de módulos correspondente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{n^3+2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2},$$

por comparação desta série de termos positivos com a série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$ concluimos que esta série é convergente e, portanto a série dada é absolutamente convergente.

c) Esta série é absolutamente convergente, uma vez que a série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3000}}{3^n}$, que é convergente (usando o Critério de d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{3} < 1$).

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Consideremos a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, e comparêmo-la com a série divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\frac{\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1} \to \frac{1}{2} \neq 0, +\infty$$

logo a série de módulos considerada é também divergente. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Tratando-se de uma série alternada tentemos usar o critério de Leibniz: considere-se a série dada na forma $\sum(-1)^n a_n$ com $a_n = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} > 0$. Como

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} < 0$$

o que mostra que a sucessão de termo geral a_n é decrescente, e como $a_n \to 0$, podemos concluir, pelo critério de Leibniz, que a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

Uma observação: o critério de Leibniz só decide da convergência de uma série, nada dizendo sobre a convergência ser simples ou absoluta. O resultado anterior foi obtido depois de termos verificado previamente que a convergência não poderia ser absoluta.

e) É uma série alternada. Considerando a série dos módulos correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, vemos que será divergente, uma vez que

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e portanto a série dos módulos tem a mesma natureza que a série harmónica. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Escrevendo a série dada na forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, temos que $a_n \to 0$ e a_n é decrescente, uma vez que a função $\operatorname{sen} x$ é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{n}$ é decrescente. Do critério de Leibniz, a série dada converge. Logo, a série é simplesmente convergente.

f) É uma série alternada. A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é divergente (uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$). Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \to 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\,\sqrt{n}} > 0$$

ou seja, (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

5.2 Séries de potências e séries de Taylor

1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries de potências convergem absolutamente, convergem simplesmente ou divergem:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$,

b) $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$,

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$,

RESOLUÇÃO

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

a) Temos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{x}{2}$. Logo, converge absolutamente para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ e diverge para $\left|\frac{x}{2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -2 \wedge x \geq 2$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ é uma série de potências, centrada em -2, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{(n+2)2^n}}{\frac{1}{(n+3)2^{n+1}}} = \lim \frac{2(n+3)}{(n+2)} = 2.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x+2| < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$ e divergente para $|x+2| > 2 \Leftrightarrow x < -4 \wedge x > 0$. Para $|x+2| = 2$, temos:

- Se $x = 0$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$, que é divergente por comparação com a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = -4$: obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente é divergente, logo esta série não é absolutamente convergente. No entanto, aplicando o critério de Leibniz, como $0 < \frac{1}{n+2}$ é decrescente, tem-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ é convergente, logo converge simplesmente.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ converge absolutamente para $x \in]-4, 0[$, converge simplesmente para $x = -4$ e diverge para $x \in]-\infty, -4[\cup [0, +\infty[$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2n}$, fazendo $y = -4x$. É uma série de potências com raio de convergência dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ e divergente para $|y| > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{1}{4}$. Para $|y| = 1$, temos:

- Se $x = -\frac{1}{4}$: obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ que é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = \frac{1}{4}$: obtemos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente diverge, portanto a série não converge absolutamente. Do critério de Leibniz, uma vez que $\frac{1}{2n} \to 0$ e é decrescente, a série converge, e portanto converge simplesmente.

  Conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$ converge absolutamente se $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, converge simplesmente para $x = \frac{1}{4}$ e diverge se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$ é uma série de potências, centrada em 0, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right|}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Para $|x| = 1$, temos:

- Se $x = 1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Uma vez que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1},$$

  concluimos que a série diverge uma vez que o termo geral não converge para 0.
- Se $x = -1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$. Já vimos que $\lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-1}$, logo $(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$ tem dois sublimites e^{-1} e $-e^{-1}$, e a série é portanto divergente, uma vez que o termo geral não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$ converge absolutamente para $x \in]-1, 1[$ e diverge para $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$: é uma série de potências, centrada em 1, cujo raio de convergência é dado por

$$\begin{aligned} R = \lim \frac{\frac{n!}{n!+1}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}} &= \lim \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)!+1}{n!+1} \\ &= \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)} = \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)!+(n+1)} \\ &= \lim \frac{1+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{n!}} = 1. \end{aligned}$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ e divergente para $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$. Para $|x-1| = 1$, temos:

- Se $x = 2$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!+1}$, que é divergente uma vez que $\frac{n!}{n!+1} \to 1 \neq 0$.
- Se $x = 0$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-1)^n}{n!+1}$, que também é divergente, uma vez que $\frac{n!(-1)^n}{n!+1}$ tem dois sublimites -1 e 1, logo o termo geral da série não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$ converge absolutamente para $x \in]0, 2[$ e diverge para $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

2. Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}(x^2-x)^n$.

RESOLUÇÃO

a) Faça-se $y = (2x)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}.$$

Esta é uma série de potências cujo raio de convergência e dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1$ e divergente para $|y| > 1$. Se $y = 1$ obtemos a série $\sum \frac{1}{n+1}$. Como $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \to 1$, esta série tem a mesma natureza que a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$, ou seja, é divergente. Se $y = -1$, obtemos a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$. Dado que $\frac{1}{n+1} \to 0$ e que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$, deduz-se, aplicando o critério de Leibniz, que a série é convergente. Como $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum \frac{1}{n+1}$ e já vimos que esta série é divergente, concluimos que para $y = -1$ a série é simplesmente convergente. Então, como

$$|y| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |(2x)^3| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{2},$$

$$y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2},$$

concluimos que a série de potências dada é absolutamente convergente se $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, simplesmente convergente se $x = -\frac{1}{2}$ e divergente se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$.

b) o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} y^n$ é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}}{\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}} = \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(n+1)^2} = 2$$

(verificar!), logo a série converge absolutamente para $|y| < 2$ e diverge para $|y| > 2$. Para $|y| = 2$, temos que

$$\frac{\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

(verifique!), logo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ é divergente ($\frac{4^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$ é crescente, e assim não converge para 0).

– se $y = -2$, obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ que é também divergente uma vez que o seu termo geral não converge para zero (terá dois sublimites diferentes).

Conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} y^n$ converge absolutamente para $|y| < 2$ e diverge para $|y| \geq 2$. Fazendo $y = x^2 - x$ e resolvendo em ordem a x, temos então que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} (x^2 - x)^n$ converge absolutamente para $-1 < x < 2$ e diverge para $x \leq -1 \vee x \geq 2$.

3. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite para determinar as respectivas derivadas de ordem n em a.

a) $f(x) = (x-1)e^x, \quad a = 1,$

b) $f(x) = e^{2x+1}, \quad a = 0,$

c) $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}, \quad a = 0,$

d) $f(x) = \cos(x+1)^2, \quad a = -1,$

e) $f(x) = \ln x, \quad a = 2,$

f) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt, \quad a = 0,$

g) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt, \quad a = 0,$

h) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad a = 0,$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 1,$

j) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad a = 0,$

k) $f(x) = \ln(x^2+1), \quad a = 0.$

RESOLUÇÃO

4. a) $$(x-1)e^x = (x-1)e\,e^{x-1} = (x-1)e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(x-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{(n-1)!}(x-1)^n.$$

Temos $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = \dfrac{e}{(n-1)!} \Leftrightarrow f^{(n)}(1) = n\,e.$

b) $e^{2x+1} = e \cdot e^{2x} = e\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e\,\frac{2^n}{n!}x^n$, para $x \in \mathbb{R}$. Temos $f^{(n)}(0) = e\,2^n$.

c) $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{x}{1-(-2x)} = x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n$, para $|2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Temos $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$.

d) $\cos(x+1)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+1)^{4n}$, para $x \in \mathbb{R}$.

Temos $f^{(4n)}(-1) = (4n)!\frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $f^{(k)}(-1) = 0$, se $k \neq 4n$ (se não é múltiplo de 4).

e) $(\ln x)' = \frac{1}{x} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$, para $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 4$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(x-2)^n + C.$$

Fazendo $x = 2$, temos $C = \ln 2$.
Temos $f^{(n)}(0) = n!\,\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$, para $n \geq 1$ e $f(0) = \ln 2$.

f) Do Teorema Fundamental do Cálculo, $\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)' = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, para $x \in \mathbb{R}$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!\,\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = (2n)!\,\frac{(-1)^n}{n!}$ e $f^{(2n)}(0) = 0$.

g) Do Teorema Fundamental do Cálculo, $\left(\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt\right)' = \operatorname{sen}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2}$. para $x \in \mathbb{R}$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}x^{4n+3} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(4n+3)}(0) = (4n+3)!\frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} = \frac{(-1)^n(4n+2)!}{(2n+1)!}$ e $f^{(k)}(0) = 0$. para $k \neq 4n+3$.

h) $P\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) = -\frac{1}{x+1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$, para $|x| < 1$. Logo, derivando termo a termo,

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n.$$

Temos $f^{(n)}(0) = n!(n+1)(-1)^n = (n+1)!(-1)^n$.

i) $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$, para $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.
Temos $f^{(n)}(1) = \frac{n!(-1)^n}{2^{n+1}}$.

j) $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}$, para $|y^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\operatorname{arctg} y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}y^{2n+1} + C.$$

Fazendo $y = 0$, temos $C = 0$. Temos assim para $-1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$$\operatorname{arctg} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2}.$$

Temos $f^{(4n+2)}(0) = (4n+2)!\,\frac{(-1)^n}{2n+1}$, e $f^{(k)}(0) = 0$ para $k \neq 4n+2$.

k) $(\ln(x^2+1))' = \dfrac{2x}{x^2+1} = 2x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1}$, para $-1 < x < 1$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\ln(x^2+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+2} x^{2n+2} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(2n)}(0) = (2n)!\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt