## 4.2 Integral: definição e propriedades

1. Considere a função $f$ definida no intervalo $[0,2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[ \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in ]1,2] \end{cases}$$

a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma decomposição $d_n$ do intervalo $[0,2]$ tal que as somas superior $S_{d_n}(f)$ e inferior $s_{d_n}(f)$ verificam

$$S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) < \frac{1}{n}, \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_{d_n}(f) = \lim_{n\to+\infty} s_{d_n}(f) = 4.$$

b) Justifique que $f$ é integrável em $[0,2]$ e que $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

RESOLUÇÃO

a) Escolhemos uma decomposição de $[0,2]$ da forma $d = \{0, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon, 2\}$. Como $\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} f(x) = \inf_{x\in[0,1-\varepsilon]} f(x) = 1$ e $\sup_{x\in[1+\varepsilon,2]} f(x) = \inf_{x\in[1+\varepsilon,2]} f(x) = 3$, $\sup_{x\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]} f(x) = 3$, $\inf_{x\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]} f(x) = 1$, temos

$$S_d(f) = 1(1-\varepsilon-0) + 3(2-(1-\varepsilon)) = 4 + 2\varepsilon$$

$$s_d(f) = 1(1+\varepsilon-0) + 3(2-(1+\varepsilon)) = 4 - 2\varepsilon$$

Tomando para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/4(n+1)$ temos

$$S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) = 4\varepsilon = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

e também

$$\lim S_{d_n}(f) = \lim 4 + \frac{1}{2(n+1)} = 4, \quad \lim s_{d_n}(f) = \lim 4 - \frac{1}{2(n+1)} = 4.$$

b) Da alínea anterior $\lim S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) = 0$ logo $f$ é integrável em $[0,2]$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = \lim S_{d_n}(f) = 4$.

2. a) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, mostre recorrendo à definição, que $f^2$ é integrável. (Sugestão: Considere $f \geq 0$; o caso geral segue de $f^2 = |f|^2$).

b) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, justifique que $fg$ é integrável. (Sugestão: $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.)

RESOLUÇÃO

a) Seja $f \geq 0$. Para cada decomposição $d = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, tem-se, escrevendo $M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$,

$$M_i(f^2) = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = M_i(f)^2,$$

$$m_i(f^2) = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = m_i(f)^2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} S_d(f^2) - s_d(f^2) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f^2) - m_i(f^2))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f)^2 - m_i(f)^2)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(M_i(f) + m_i(f))(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) = 2M(S_d(f) - s_d(f)), \end{aligned}$$

onde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$ aribtrário, como $f$ é integrável, podemos escolher a decomposição $d$ tal que $S_d(f) - s_d(f) < \frac{\varepsilon}{2M}$, e portanto tal que

$$S_d(f^2) - s_d(f^2) < \varepsilon.$$

Conclui-se que $f^2$ é integrável para $f \geq 0$ integrável.

Para $f$ arbitrária, como $f$ integrável $\Rightarrow |f|$ integrável e portanto, como vimos acima, $|f|^2 = f^2$ é integrável.

b) De $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, temos que $fg$ é uma soma de funções integráveis, e portanto integrável.

3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{1}{k} & \text{se } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Mostre que $f$ é descontínua em qualquer ponto da forma $x = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

b) Mostre que $f$ é monótona crescente. Justifique que $f$ é integrável em $[0,1]$.[1]

RESOLUÇÃO

[1]NOTA: $f$ é um exemplo de uma função integrável com um número infinito (numerável) de descontinuidades.


jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

a) É imediato da definição que, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo, $k \geq 2$, $f(\frac{1}{k}^-) = \frac{1}{k}$ e $f(\frac{1}{k}^+) = \frac{1}{k-1}$. Logo, $f$ não é contínua em $\frac{1}{k}$.

(Já agora: $f$ é contínua em qualquer $x \neq \frac{1}{k}$, $k \geq 2$, à esquerda em 1 e à direita em 0 - mais difícil! )

b) Seja $x \in ]0,1[$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Se $y > x$ então:

– se $y \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, então $f(x) = f(y) = \frac{1}{k}$.

– caso contrário, $y \in \left]\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$, com $l < k$, já que $y > x$. Logo $f(y) = \frac{1}{l} > \frac{1}{k} = f(x)$.

Em qualquer dos caso, $f(y) \geq f(x)$ e $f$ é monótona crescente (não estritamente). É integrável já que qualquer função monótona (em $[a, b]$) é integrável (em $[a, b]$).

4. Sendo $f$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que se é nulo o integral de $f$ em *qualquer* intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   RESOLUÇÃO

Se, por contradição, fosse $f(a) > 0$ para algum $a$, como $f$ é contínua, seria $f(x) > f(a)/2 > 0$ em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, para algum $\varepsilon > 0$. Da monotonia do integral, $\int_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[} f(t)\,dt > \varepsilon f(a) > 0$, o que contradiz a hipótese. Da mesma forma, também não pode ser $f(a) < 0$. Logo, $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Alternativamente, tem-se por hipótese $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Derivando ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo, já que $f$ é contínua), temos

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

É suficiente tomar $f(x) = 0$ excepto num conjunto finito, por exemplo $f(0) = 3$, $f(x) = 0$, $x \neq 0$ (também pode ser, por exemplo, $f(x) = 0$, $x \notin \mathbb{Z}$, $f(n) = n$, $n \in \mathbb{Z}$).

## 4.3 Teorema Fundamental do Cálculo

1. Calcule $\phi'(x)$ sendo $\phi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$.

Como $e^{\operatorname{sen} t}$ é uma função contínua, do Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$ é diferenciável, logo $\phi(x) = x^2 \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$ também será e

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \left(\int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt\right)' = \left(-x^2 \int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\, dt\right)' \\ &= 2x \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt - x^2 e^{\operatorname{sen} x}.\end{aligned}$$

2. Seja $f$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

   a) Justifique que $F$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.
   b) Mostre que $F$ é estritamente crescente e que, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xF(x) > 0$.
   c) Prove que se $f$ tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pode ser finito ou $+\infty$.

a) Directamente do Teorema Fundamental do Cálculo; $F'(x) = f(x)$.
b) Como $F'(x) = f(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$, $F$ é estritamente crescente. Temos então $F(x) > F(0) = 0$, para $x > 0$, e $F(x) < F(0) = 0$, para $x < 0$, ou seja, $xF(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
c) Seja $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^+$ e $M \in \mathbb{R}$ tal que, para $x > M$, tem-se $f(x) > \frac{L}{2}$. Então, para $x > M$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^M f(t)\, dt + \int_M^x f(t)\, dt \\ &> \int_0^M f(t)\, dt + \frac{L}{2}\int_M^x 1\, dt = \int_0^M f(t)\, dt + \frac{L}{2}(x - M).\end{aligned}$$

Como $\int_0^M f(t)\, dt$ é constante e $\lim_{x\to+\infty} \frac{L}{2}(x-M) = +\infty$, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Neste caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}$$

temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$.

3. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[-1,1] \setminus \{0\}$ tal que $f(0^+)$ e $f(0^-)$ existem em $\mathbb{R}$ e para $x \in [-1,1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_{-x}^x f(t)dt.$$

a) Justifique que $F$ e $G$ estão bem definidas.
b) Mostre que se $f(0^+) \neq f(0^-)$, então $F$ não é diferenciável em 0.
c) Mostre que $G$ é diferenciável em 0 e $G'(0) = f(0^+) + f(0^-)$.

a) $f$ é integrável em $[-1,1]$ porque é contínua excepto num conjunto singular e é limitada (mais precisamente: é integrável em $[-1,0]$ e em $[0,1]$ já que em qualquer desses intervalos coincide com uma função contínua, a menos possivelmente de $-1$ e 1, respectivamente). Logo é integrável em qualquer intervalo da forma $[0,x]$ e $[-x,x]$, para $x \in [-1,1]$.

b) Usando a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0^+)$$

e da mesma forma $F'_e(0) = f(0^-)$. Conclui-se que se $f(0^+) \neq f(0^-)$ então $F$ não é diferenciável em 0.

c) Temos $G(x) = \int_{-x}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = -F(-x) + F(x)$. Usando a regra de Cauchy, o Teorema Fundamental do Cálculo e $y = -x$:

$$G'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-F(-x) + F(x)}{x} = \lim_{y\to 0^-} f(y) + \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0^-) + f(0^+).$$

Da mesma forma se vê que $G'_e(0) = f(0^-) + f(0^+) = G'_d(0)$, logo $G$ é diferenciável em 0 e $G'(0) = f(0^+) + f(0^-)$.

4. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x f(t)\,dt &= 2\int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \int_{-x}^x g(t)\,dt &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

a) Mostre que se $f$ é par e $g$ é ímpar então verificam (4.1).

b) Mostre que se $f$ e $g$ são contínuas e verificam (4.1) então $f$ é par e $g$ é ímpar.

c) Forneça exemplos de funções $f$ e $g$ que verificam (4.1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

a) Sai da definição de integral e de somas superiores e inferiores dado que por exemplo, se $f$ é par, $\sup_{[-x_{k+1},-x_k]} f(x) = \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, logo todas as somas superiores de $f$ em $[-x,0]$ coincidem com as somas superiores de $f$ em $[0,x]$, e da mesma forma para as somas inferiores, concluindo-se que $\int_{-x}^{0} f(x)\,dx = \int_0^x f(x)\,dx$.

b) Do Teorema Fundamental do Cálculo.

c) Por exemplo, alterar função contínua par / ímpar num número finito de pontos.

5. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique integrabilidade da função $f$, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$ .

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

a) Note-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{x} = 1$$

pelo que a função integranda *não* é contínua. No entanto só difere em 0 da função contínua $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como alterar uma função num ponto não altera a sua integrabilidade nem o valor do seu integral, a integrabilidade de $\tilde{f}$ implica a integrabilidade de $f$ em qualquer intervalo limitado sendo os integrais de $\tilde{f}$ e $f$ iguais.

b)

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x f = \frac{d}{dx}\int_0^x \tilde{f} = \tilde{f}(x).$$

(Note-se que a não continuidade de $f$ não permite aplicar o teorema fundamental do cálculo para calcular a derivada do integral indefinido de $f$ e tivemos que recorrer à igualdade com o integral de $\tilde{f}$.)


jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

6. Considere a função $\phi : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t \, dt.$$

a) Calcule $\phi(2)$.

b) Mostre que $\phi$ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.

c) Estude $\phi$ do ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c > 0$ tal que $\phi(c) = 0$.

RESOLUÇÃO

a)
$$\begin{aligned} \phi(2) &= \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t \, dt = \left[ -\frac{1}{2(1+t^2)} \ln t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2t(1+t^2)} \, dt \\ &= -\frac{\ln 2}{10} + \frac{1}{2} \int_1^2 \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{13}{20} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 5. \end{aligned}$$

b) $\phi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln x$, para $x > 0$.

c) Tem-se $\frac{x}{(1+x^2)^2} > 0$ para qualquer $x > 0$, logo $\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ou seja, $\phi$ é crescente em $]1,+\infty[$ e decrescente em $]0,1[$.

Tem-se $\phi(1) = 0$. Se existisse $c \neq 1$ tal que $\phi(c) = 0$, então, do Teorema de Rolle, existiria um zero de $\phi'$ entre 1 e $c$. Como $\phi'(x) \neq 0$ para $x \neq 1$, temos que 1 é o único 0 de $\phi$.

7. Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, dt$.

a) Determine o seu domínio e mostre que $f$ é par.

b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.

c) Mostre que existe $a > 0$ tal que $f$ é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim_{x \to 0} f(x)$?

RESOLUÇÃO

a) Como a função integranda $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua no seu domínio, será integrável em qualquer intervalo limitado que não contenha 0. Como $x$ e $3x$ têm sempre o mesmo sinal, temos $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fazendo a mudança de variável $u = -t$ temos

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t} \, dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-1) \, du \\ &= \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u} \, du = f(x). \end{aligned}$$

Logo $f$ é par,



*Responsável*:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

b) $f$ é diferenciável uma vez que $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ é contínua (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\int_a^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_a^x \frac{\cos t}{t}\,dt\right)' = 3\,\frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \\ &= \frac{\cos 3x - \cos x}{x}, \end{aligned}$$

em que tomamos $a > 0$, para $x > 0$, e $a < 0$, para $x < 0$.

c) Como cos é decrescente em $]0, \pi[$, temos que para $0 < 3x < \pi$, $\cos(3x) < \cos x$, logo $f'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} < 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$, ou seja $f$ é monótona decrescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$. Por outro lado, para $x > 0$,

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leq \int_x^{3x} \frac{|\cos t|}{|t|}\,dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_x^{3x} = \ln 3.$$

Logo $f$ é limitada em $]0, \frac{\pi}{3}[\subset ]0, +\infty[$.

Conclui-se que existe $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Como $f$ é par, existe também $f(0^-) = f(0^+)$, logo existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

8. Sendo $\phi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, se $x \neq 0$ e $\phi(0) = 0$, considere a função $g(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt$.

(a) Justifique que $g$ é ímpar.

(b) Determine $g'(x)$, para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$.

(c) Indique as abcissas dos pontos onde o gráfico de $g$ tem tangente horizontal. Justifique que $g$ é estritamente crescente.

(d) Justifique que $g$ é limitada.

RESOLUÇÃO

(a) $g(-x) = \int_0^{-x} \phi(t)\,dt = \int_0^x \phi(-u)(-1)\,du = -g(x)$, notando que $\phi$ é par.

(b) Para $x \neq 0$ temos do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Em $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \phi(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativamente, poderiamos considerar a função $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$, para $x \neq 0$ e $\tilde{\phi}(0) = \lim_{x\to 0} \phi(x) = \frac{1}{2}$, que é contínua em $\mathbb{R}$, e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a $\tilde{\phi}$ em $\mathbb{R}$.)


jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

(c) $g'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(d) Como $g$ é ímpar, é suficente considerar $x \geq 0$. Temos que $g$ é limitada em qualquer intervalo $[0, a]$, $a > 0$, uma vez que é contínua (decorre da continuidade do integral indefinido de qualquer função integrável). Para $x \in [a, +\infty[$ podemos majorar $g(x)$ por

$$g(a) + \int_a^x \frac{2}{x^2} = g(a) - \frac{2}{x} + \frac{2}{a} \leq g(a) + \frac{2}{a}.$$

9. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$. Mostre que, se $f$ é contínua e periódica de período $T > 0$, então

a) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, dt$ é uma função constante em $\mathbb{R}$.

b) Sendo $F$ uma primitiva de $f$, $F$ será também periódica de período $T$ se e só se $\int_0^T f(t)\, dt = 0$.

RESOLUÇÃO

a) Usando a continuidade da função integranda para justificar a diferenciabilidade de $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ pode derivar-se o integral e usar a periodicidade da função para mostrar que o integral tem derivada nula, pelo que é constante. Com efeito:

$$G'(x) = \left( \int_x^{x+T} f(t)\, dt \right)' = f(x+T) - f(x) = 0$$

(Note-se que a justificação anterior não é possível se não se supuser que $f$ é contínua. No entanto a conclusão continua a ser verdadeira! é necessário nesse caso usar mudança de variável e a aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração - verifique!).

b) Se $F$ é uma primitiva de $f$ e é periódica de período $T$, temos

$$\int_0^T f(t)\, dt = F(T) - F(0) = 0.$$

Reciprocamente, se $\int_0^T f(t)\, dt = 0$ então da alíena anterior, temos

$$G(x) = G(0) = 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)\, dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0.$$

Logo $F$ é periódica de período $T$.


jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

## 4.4 Integração e cálculo de Áreas

1. Calcule o valor dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x \, dx,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3}\, dx,$ g) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) dx,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx,$ e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx,$ h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \, dx,$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{2t}}\, dt,$ i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx,$

RESOLUÇÃO

a) $$\int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x\right]_1^{\pi} - \int_1^{\pi} \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi^2}{2} \operatorname{arctg} \pi - \frac{\pi}{8}$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^{\pi} (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx = \frac{\pi^2}{2} \operatorname{arctg} \pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_1^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2+1}{2} \operatorname{arctg} \pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

b) $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

c) $$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \, dx = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\cos \pi + \frac{1}{3}\cos^3 \pi + \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 = \frac{4}{3}.$$

d) $$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\, dx = \left[\ln|x-3|\right]_0^1 = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}.$$

e) $$\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx = \int_2^4 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right]_2^4 = \frac{80}{3} + \ln 3.$$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\, dt = \int_1^e \frac{1}{x+x^2}\,\frac{1}{x}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx,$ fazendo a mudança de variável $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$. Tem-se

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

(verifique) e portanto

$$\int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx = -1 - \frac{1}{e} + \ln(1+e) + 0 + 1 - \ln 2 = -\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

g) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2} - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^2}{2} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} dx$

$\displaystyle = 2 \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sqrt{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x)\, dx$

$\displaystyle = \left[\frac{2}{3} \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7} \operatorname{sen}^{\frac{7}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}.$

i) Fazendo a substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, temos $x = 0 \Leftrightarrow t = e^0 = 1$ e $x = 1 \Leftrightarrow t = e$, logo

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)} dt = \int_1^e -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t} dt = [-\ln|1+t| + \ln|t|]_1^e$

$= -\ln(1+e) + 1 + \ln 2.$

OU escrever $\displaystyle\frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$

2. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

RESOLUÇÃO

De $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ temos $y = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. A área fica (fazendo a substituição $x = 2 \operatorname{sen} t$):

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\, dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)\, dt = 4\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.$$

3. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y = \ln(1+x)$, $y = -\ln(1+x)$, $x = e-1$

b) $y = \ln(1+x^2)$, $y = \ln 2$,

c) $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$,

d) $y^2 = 4(1-x)$ e $y^2 = 2(2-x)$.

a) $\displaystyle A = \int_0^{e-1} 2\ln(1+x)\, dx = [2x\ln(1+x)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx$

$\displaystyle = 2(e-1) - 2\int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{x+1} dx = 2(e-1) - 2\,[x - \ln|x+1|]_0^{e-1} = 2(e-1) - 2(e-1) + 2 = 2.$

b) Os pontos de intersecção são em $x = 1$ e $x = -1$ e, em $[-1, 1]$, $\ln(1 + x^2) \leq \ln 2$, logo

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \ln 2 - \ln(1 + x^2)\, dx = 2 \int_{0}^{1} \ln 2 - \ln(1 + x^2)\, dx \\ &= 2 \ln 2 - 2[x \ln(1 + x^2)]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1}\, dx \\ &= 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + 4 \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = 4[x - \operatorname{arctg} x]_0^1 = 4(1 - \frac{\pi}{4}) = 4 - \pi. \end{aligned}$$

c) As curvas intersectam-se nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1)$, e para $x \in [1, e]$, $\ln x \geq \ln^2 x$. Temos

$$\begin{aligned} A = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx &= \left[x\left(\ln x - \ln^2 x\right)\right]_1^e - \int_1^e x\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x} \ln x\right) dx \\ &= e(1 - 1) - 1(0 - 0) - [x]_1^e + \int_1^e 2 \ln x\, dx \\ &= -e + 1 + [2x \ln x]_1^e - \int_1^e 2\, dx = 3 - e. \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 \left(\sqrt{2(2 - x)} - \sqrt{4(1 - x)}\right) dx + 2 \int_1^2 \sqrt{2(2 - x)}\, dx \\ &= 2 \int_0^2 \sqrt{2(2 - x)}\, dx - 2 \int_0^1 \sqrt{4(1 - x)}\, dx = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Alternativamente, integrar em $y$: as linhas são $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ e $x = 2 - \frac{y^2}{2}$ e temos $A = 2 \int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} - 1 + \frac{y^2}{4}\right) dy$.

4. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 \leq y \leq 2(x + 1)\right\}$, b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (1 - x) \operatorname{arctg} x\right\}$.

RESOLUÇÃO

a) Temos $(x + 1)^2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$ e $2(x + 1) > (x + 1)^2 \Leftrightarrow x \in ]-1, 1[$, logo
$$A = \int_{-1}^{1} 2(x + 1) - (x + 1)^2\, dx = \left[(x + 1)^2 - \frac{1}{3}(x + 1)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

b) Temos $(1 - x) \operatorname{arctg} x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$ e $(1 - x) \operatorname{arctg} x > 0 \Leftrightarrow x \in ]0, 1[$, logo


jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

$$A = \int_0^1 (1-x)\operatorname{arctg} x\, dx = \left[(x - \frac{x^2}{2})\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2}}{1+x^2}\, dx$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1-\ln 2}{2}.$$