3.3 Estudo de funções

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.

c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

d) Estude f quanto a monotonia e extremos.

e) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e determine o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO

a) f é diferenciável no ponto 1 uma vez que é dada, numa vizinhança de 1, pela função $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ que é diferenciável no seu domínio (por ser a composta de uma função trigonométrica inversa com uma função racional). Temos

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 + 1},$$

logo $f'(1) = -\frac{1}{2}$. A tangente ao gráfico no ponto 1 é a recta

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}.$$

b) Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0) = a$ e

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

resulta que f é contínua em 0 se e só se $a = \frac{\pi}{2}$.

Quanto à diferenciabilidade,

$$f_e'(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-} \frac{bx}{x} = b$$

e

$$f_d'(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}.$$

Como se trata de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, tentemos usar a regra de Cauchy. Assim, como

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2})'}{(x)'} = \lim_{x\to0^+} = -\frac{1}{x^2 + 1} = -1,$$

deduz-se que $f_d'(0) = -1$ e que f é diferenciável em 0 sse $a = \frac{\pi}{2}$ e $b = -1$.

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

c) Se $a < 0$, então numa vizinhança de a f é dada pela função polinomial $\frac{\pi}{2} - x$, que é diferenciável. Logo f é diferenciável em $]-\infty, 0[$.

Se $a > 0$, então numa vizinhança de a, f é dada pela função $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Concluimos que f é diferenciável em a se $a > 0$ e, portanto, f é diferenciável em $]0, +\infty[$.

Como para $a < 0$, $f'(a) = b = -1$, temos

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para ver se f é de classe C^1, ou seja, se f' é contínua: temos que f' é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (justifique). No ponto 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x^2+1} = -1 = f'(0).$$

Logo f' é contínua em 0 e portanto é de classe C^1.

d) f é decrescente em $\mathbb{R}$, já que $f'(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}$, não tem extremos.

e) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(0) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2} - x = +\infty$. O contradomínio é $\mathbb{R}^+$ (justifique).

2. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$.
b) Determine $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.
d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.
e) Determine o contradomínio de g.

RESOLUÇÃO

a) Se g tem derivada finita em 0, será contínua em 0, logo $g(0) = g(0^+) = g(0^-)$, ou seja,

$$g(0) = 1 + \beta = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

logo $\beta = \frac{\pi}{4} - 1$. Por outro lado, g é diferenciável em 0 logo $g'_e(0) = g'_d(0)$ e temos

$$g'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + \alpha x + \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} + \alpha = \alpha + 1,$$

$$g'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy na indeterminação $\frac{0}{0}$) logo $\alpha = -1$.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - x + \frac{\pi}{4} - 1 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

c) g é diferenciável em $\mathbb{R}$ (justifique) e

$$g'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{1+(e^x+e^{-x}-1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

d) Temos para $x \leq 0$: $g'(x) = e^x - 1 < 0$ para qualquer $x < 0$ e $g'(0) = 0$. Logo g é decrescente em $]-\infty, 0]$.
Para $x > 0$: $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1+(e^x+e^{-x}-1)^2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Logo g é crescente em $]0, +\infty[$. Conclui-se que 0 é um ponto de mínimo absoluto, usando a continuidade de g em 0.

e) Da alínea anterior temos que $g(0) = \frac{\pi}{4}$ é um mínimo absoluto, logo $g(x) \geq \frac{\pi}{4}$ para qualquer x e $CD_g = g(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$. Por outro lado, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ e g é contínua em $]-\infty, 0]$. Conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[\subset g(\mathbb{R})$.
Logo o contradomínio de g é $CD_g = \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.
c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^{-\frac{x^2}{2}})$ é uma indeterminação do tipo $(-\infty)\cdot 0$. Escrevendo $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, a que podemos tentar aplicar a Regra de Cauchy. Como,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0,$$

podemos concluir que,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Como a função é par, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) A função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis, sendo portanto diferenciável. Para $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^+} -e^{-\frac{x^2}{2}} = -1.$$

Logo, $f_d'(0) \neq f_e'(0)$ e f não é diferenciável em 0. Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e neste caso

$$f'(x) = \begin{cases} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2), & \text{se } x > 0, \\ \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Usamos a alínea anterior.
Para $x > 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

logo f é crescente em $[0, 1]$ e decrescente em $[1, +\infty[$.
Para $x < 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \ \vee \ x > 1) \ \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow x < -1$$
$$f'(-1) = 0$$

logo f é crescente em $]-\infty, -1]$ e decrescente em $[-1, 0]$.
Conclui-se que 1 e -1 são pontos de máximo, absolutos uma vez que $f(-1) = f(1)$. Como f é decrescente em $[-1, 0]$ e crescente em $[0, 1]$, temos também que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, para $x \neq 0$.

d) Temos da alínea anterior que f tem um máximo absoluto em 1, com $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ e um mínimo absoluto em 0 com $f(0) = 0$, logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, e^{-\frac{1}{2}}]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, temos também, do Teorema do Valor Intermédio, que $[0, e^{-\frac{1}{2}}] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.
   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.
   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
   d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO:

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^{x-1})$ é uma indeterminação do tipo $(-\infty)\cdot 0$. Escrevendo $-xe^{x-1} = \frac{-x}{e^{1-x}}$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ à qual podemos tentar aplicar a Regra de Cauchy. Como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)'}{(e^{1-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0,$$

podemos concluir que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = 0.$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0,$$

em que a penúltima igualdade é justificada a posteriori pela existência do último limite (relembre as condições de aplicação da regra de Cauchy).

b) A função é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ por ser dada nesse conjunto pelo produto de duas funções diferenciáveis: $|x|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $e^{-|x-1|}$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (por ser a composta de duas funções: exponencial diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x-1|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). Em $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{xe^{-x+1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} e^{-x+1}(1-x) = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$, tendo em conta a existência do último limite) e da mesma forma,

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{xe^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} e^{x-1}(1+x) = 2.$$

Logo, $f_d'(1) = 0 \neq f_e'(1) = 2$ e f não é diferenciável em 1.

No ponto 0, pode ver-se (justifique) que $f_d'(0) = e^{-1} \neq f_e'(0) = -e^{-1}$, logo f não é diferenciável em 0, e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} (xe^{-x+1})' = e^{-x+1}(1-x), & \text{se } x > 1, \\ (xe^{x-1})' = e^{x-1}(1+x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ (-xe^{x-1})' = -e^{x-1}(1+x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Temos (justifique): $f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, estudando o sinal de f' e usando a continuidade de f,

- f crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[0, 1]$,
- f decrescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$.

Logo, -1 é ponto de máximo, 0 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Como $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ para $x \neq 0$, 0 é mínimo absoluto. Por outro lado, $f(1) = 1$ e $f(-1) = e^{-2} < 1$, logo 1 é ponto de máximo absoluto, e consequentemente, -1 é ponto de máximo relativo.

d) Da alínea anterior, temos que $0 = f(0)$ é mínimo absoluto de f e $1 = f(1)$ é máximo absoluto de f. Logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, do Teorema do Valor Intermédio, $[0, 1] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $CD_f = f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

5. Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se
$$\varphi(x) = 2\,\mathrm{tg}\,(g(x)) - g(x).$$
Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

RESOLUÇÃO:

Do teorema de derivação da função composta,

$$\begin{aligned}(\varphi(x))' &= (2\,\mathrm{tg}\,(g(x)) - g(x))' \\ &= (2 + 2\,\mathrm{tg}^2\,(g(x)))g'(x) - g'(x) \\ &= g'(x)(2\,\mathrm{tg}^2\,(g(x)) + 1).\end{aligned}$$

Logo $\varphi'(0) = 0$. Como $g'(0) = 0$ e g' é estritamente monótona, temos que g' muda de sinal numa vizinhança de 0 (se g' é crescente, $g'(x) < g'(0) = 0$, para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$) e portanto, como $2\,\mathrm{tg}^2\,(g(x)) + 1 > 0$ para qualquer x, φ' também muda de sinal numa vizinhança de 0. Como φ é contínua em 0 - já que g é contínua por ser diferenciável, e tg é contínua em $g(0) = 0$ - conclui-se que $\varphi(0)$ é extremo de φ (mínimo, se g' for crescente).

6. Determine os extremos da função $f(x) = \mathrm{arctg}(x^2)$, classificando-os, e determine os seus pontos de inflexão. Esboce o gráfico da função.

RESOLUÇÃO

Temos
$$f'(x) = (\mathrm{arctg}\,x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}, \qquad f''(x) = (\frac{2x}{1+x^4})' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

Sendo 0 o único ponto crítico de f, ou seja solução de $f'(x) = 0$, e como $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ temos que f é crescente em $]0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$, logo 0 é ponto de mínimo (ou a segunda derivada $f''(0) = 1 > 0$)

Atendendo a que $f(0) = 0$ e f é não negativa, 0 é um mínimo absoluto.

Os pontos de inflexão de f são as soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, uma vez que f'' muda de sinal nestes pontos.

7. Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função.

   RESOLUÇÃO:

Dado que $f \in C^2(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (x^4 e^{-x})' = x^3\, e^{-x}\,(4 - x)\,, \qquad f''(x) = x^2\, e^{-x}\,(12 - 8x + x^2)\,,$$

- Monotonia e extremos:
  Os pontos críticos de f, i.e. as solução de $f'(x) = 0$, são 0 e 4. Temos

  $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 4[,$$

  (justifique) logo a função é estritamente crescente no intervalo $]0, 4[$ e estritamente decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]4, +\infty[$. Conclui-se que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) \geq 0, \forall x$, ou vendo que

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0,$$

  e 4 é um ponto de máximo, relativo uma vez que

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4\, e^{-x} = +\infty.$$

- Concavidade e inflexões:
  Temos

  $$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x = 2 \vee x > 6.$$

  Logo f tem concavidade para cima em $]-\infty, 2[$ e em $]6, +\infty[$, e virada para baixo em $]2, 6[$ (notem que $f''(0) = 0$ mas 0 não é ponto de inflexão dado que f'' não muda de sinal em 0).

- Assíntotas:
  Uma vez que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ é assíntota horizontal à direita. Não há assíntota oblíqua à esquerda já que

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3\, e^{-x} = +\infty.$$

  (Não há assíntotas verticais, já que f é contínua em $\mathbb{R}$.)

O gráfico de f pode agora ser esboçado: