2.4 Continuidade Global

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.
   RESOLUÇÃO

   Para $x = 0$, temos $\operatorname{sen}^3 0 + \cos^3 0 = 1$ e para $x = \pi$, $\operatorname{sen}^3 \pi + \cos^3 \pi = -1$. Se $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$, então f é contínua porque é dada pela soma e produto de funções contínuas e $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -1 < 0$, logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $x \in]0, \pi[$ tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$.

2. Mostre que a equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tem pelo menos duas soluções em $\mathbb{R}$.
   RESOLUÇÃO

   Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 1$, então as soluções da equação correspondem aos zeros de f. Temos $f(0) = 1$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas, tem-se do Teorema do Valor Intermédio / de Bolzano que existem $c_1 \in] - \pi, 0[$ e $c_2 \in]0, \pi[$ com $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

3. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(-1) = f(1) = 0$. Mostre que f tem um ponto fixo, ou seja, que existe $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano a $h(x) = f(x) - x$.)
   RESOLUÇÃO

   Note-se que os pontos fixos de f correspondem aos zeros de $h(x) = f(x) - x$. Temos $h(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$ e $h(-1) = f(-1) - (-1) = 1 > 0$. Como h é contínua, do Teorema de Bolzano, terá pelo menos um zero, i.e., existe $c \in] - 1, 1[$ tal que $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

4. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta\,,$$

   com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha, \beta[$.
   RESOLUÇÃO

   Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Vemos que f assume valores arbitrariamente próximos de α e de β e o resultado sai por continuidade.

Dado $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon < (\beta - \alpha)/2$, podemos tomar a, b tais que

$$\alpha - \epsilon < f(a) < \alpha + \epsilon < \beta - \epsilon < f(b) < \beta + \epsilon$$

(da definição de limite, existe $R > 0$ tal que podemos tomar quaisquer $a < -R$ e $b > R$) . Aplicamos o teorema do Valor Intermédio no intervalo $[a, b]$ e temos que $[f(a), f(b)] \subset CD_f$. Em particular, $]\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon[\subset CD_f$, para qualquer $\epsilon > 0$, logo $]\alpha, \beta[\subset CD_f$.

5. Seja f uma função contínua num intervalo I.

   (a) Justifique que se $f(x_0) > f(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_2)$ então existe $c \in [a, b]$, $c \neq x_0$ e $f(c) = f(x_0)$.

   (b) Mostre que se f é injectiva em I então é estritamente monótona em I.

   (c) Considere $g(x) = -e^x$, para $x \leq 0$, $g(x) = e^x$ para $x > 0$. Justifique que g é injectiva em $\mathbb{R}$ e não monótona. Indique um intervalo onde g seja monótona.

RESOLUÇÃO

(a) Tomando a função $g(x) = f(x) - f(x_0)$, tem-se g contínua em I e $g(x_1) < 0$, $g(x_2) > 0$, logo existe $c \in I$ tal que $g(c) = 0$, pelo Teorema do Valor Intermédio.

(b) Considere-se $x_0, x_1, x_2 \in I$ quaisquer, com $x_0 < x_1 < x_2$. Como f é injectiva, $f(x_0) \neq f(x_1) \neq f(x_2)$. Se for $f(x_0) < f(x_1)$ e $f(x_0) > f(x_2)$ pela alínea anterior teríamos $f(c) = f(x_0)$ o que é impossível, dado que f é injectiva. Concluimos que $f(x_0) < f(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_2)$ e f é estritamente crescente ou $f(x_0) > f(x_1)$ e $f(x_0) > f(x_2)$ e f é estritamente decrescente.

(c) g é monótona em $] - \infty, 0]$.

6. a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função $\varphi(x) = g(1-x^2)$ tem máximo e mínimo.

   b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existência de máximo e mínimo? Justifique.

RESOLUÇÃO

a) A função φ é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in [0, +\infty[\}$, uma vez que é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios. Temos

$$1 - x^2 \in [0, +\infty[\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1],$$

ou seja, $D = [-1, 1]$. Como D é um intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass garante que φ tem máximo e mínimo em D.

b) Não. Neste caso, o domínio de φ seria $]-1,1[$. Tomando uma função g ilimitada numa vizinhança de 0, teríamos que φ seria ilimitada em vizinhanças de -1 e 1. Por exemplo, se $g(x) = \ln(x)$, então $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to -1^+} \varphi(x) = -\infty$.

7. Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.$$

Mostre que f tem mínimo e que o contradomínio de f é da forma $[f(c), +\infty[$, para algum $c \in]-1,1[$.

RESOLUÇÃO

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, fixo $R > 0$, existem $a, b \in]-1,1[$ tais que se $-1 < x < a$ ou se $b < x < 1$, então $f(x) > R$. Neste caso $f(a) \geq R$ e $f(b) \geq R$, porque f é contínua em a, b. Do Teorema de Weierstrass, sendo contínua, a função terá mínimo em $[a,b]$, i.e., existe c tal que $f(x) \geq f(c)$, $x \in [a,b]$. Mas se $x \in]-1,a[\cup]b,1[$, então $f(x) > R \geq f(a) \geq f(c)$, logo $f(c)$ é mínimo em $]-1,1[$. O contradomínio sai do Teorema de Bolzano / Valor Intermédio.

8. Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

a) Prove que f é limitada.

b) Mostre que f tem um ponto fixo, ou seja, que existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$

RESOLUÇÃO

a) Como existe (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, temos que f é limitada numa vizinhança de $+\infty$, ou seja num intervalo $[b, +\infty[$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Da mesma forma, f será limitada num intervalo $]-\infty, a]$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, por ser contínua, o Teorema de Weierstrass garante que f é limitada em $[a,b]$. Logo é limitada em $\mathbb{R}$.

b) Considerando a função $h(x) = f(x) - x$, temos $\lim x \to \pm\infty h(x) = \lim x \to \pm\infty - x = \mp\infty$. Como h é contínua e o produto dos dois limites é negativo ($h(x) > 0$ para $x < x_0$ e $h(x) < 0$, para $x > x_1$), o Teorema do Valor Intermédio/ de Bolzano garante que existe c tal que $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

c) Para $g(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$, temos $g(x) \leq 1$ e $g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Agora, se o produto dos dois limites indicados é negativo, ou seja, se os limites indicados têm sinais diferentes, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, logo como f é contínua, o Teorema do Valor Intermédio garante que existe c tal que $f(c) = 0$. Temos neste caso $g(c) = 1 = \max g$.