2 LIMITE E CONTINUIDADE

2.1 Funções elementares

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

   a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

   b) $f(x) = 2\operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   RESOLUÇÃO

2. a) Como e^x é crescente, com contradomínio $]0, +\infty[$, o contradomínio de f é $]e^{-2}, +\infty[$. Para $x > 0$ e $y \in \left]e^{-2}, +\infty\right[$, temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x^2-2} = y \Leftrightarrow x^2 - 2 = \ln y \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln y + 2}.$$

   Logo, a inversa de f é

$$f^{-1} : \left]e^{-2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y + 2},$$

   com contradomínio $CD_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+$.

   b) O contradomínio de sen restrito a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é $\operatorname{sen}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, logo o contradomínio de f é $[-2, 2]$. Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-2, 2]$, temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = y \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} \frac{y}{2}$$

   (note-se que $\frac{y}{2} \in [-1, 1]$, que é o domínio de $\operatorname{arcsen} x$). Logo a inversa de f é

$$f^{-1} : [-2, 2] \to \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} \frac{y}{2}.$$

   com contradomínio $CD_{f^{-1}} = D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Deduza as seguintes identidades:

a) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$, b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$.

RESOLUÇÃO

a) Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Queremos calcular $\cos\alpha$. De $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, temos $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha \geq 0$, vem

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}.$$

b) Sai de a) e de $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ (que vem da definição de função inversa), uma vez que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
Para ver directamente Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, $x \neq \pm 1$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Queremos calcular $\operatorname{tg}\alpha$. De $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ temos

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{|x|}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\operatorname{sen}\alpha \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\operatorname{sen}\alpha \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \leq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

a) Se f é crescente (resp. decrescente), então g é crescente (resp. decrescente).

b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

c) arcsen, arctg são crescentes e ímpares, arcos é decrescente.

RESOLUÇÃO

$f : D \to \mathbb{R}$ função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa.

a) Seja f crescente. Como f é injectiva, f é estritamente crescente. Logo, para $x, x' \in D$, $x > x' \Leftrightarrow f(x) > f(x')$. Então, para $y, y' \in f(D)$, $y = f(x)$, com $y' = f(x')$ (ou seja, $g(y) = x$, $g(y') = x'$) temos

$$y > y' \Leftrightarrow f(x) > f(x') \Leftrightarrow x > x' \Leftrightarrow g(y) > g(y').$$

Logo g é (estritamente) crescente.

b) Para $y \in f(D)$, seja $x \in D$, com $y = f(x)$, ou seja, tal que $g(y) = x$. Então $-y = -f(x) = f(-x)$, porque f é ímpar, logo $g(-y) = -x$, e assim $g(-y) = -x = -g(y)$, e g é ímpar.

c) Directamente de a), b) e das propriedades de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

5. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para as funções trigonométricas):
   i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
   ii) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
   iii) $\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$

b) Verifique que a função sh é ímpar, a função ch é par e que

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x.$$

Esboce os gráficos de ch e sh a partir dos gráficos de e^x e e^{-x} (verifique que $\operatorname{ch} x \geq 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$).

c) As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por argsh e argch, em que

$$x = \operatorname{sh} y \Leftrightarrow y = \operatorname{argsh} x, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$x = \operatorname{ch} y \Leftrightarrow y = \operatorname{argch} x, \quad y \in \mathbb{R}^+.$$

Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

RESOLUÇÃO

a) i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \dfrac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1;$

iv) $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\,\dfrac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x;$

v) De i) e ii), temos $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$. Logo, $\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$.

b) Resulta directamente da definição.

c) Temos $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente, logo a sua inversa $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh} x = y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} &\Leftrightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}. \end{aligned}$$

Como $e^y > 0$, temos

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2+4}}{2} = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Para argch, é semelhante, sendo que temos de restringir $\operatorname{ch} y$ a $y \geq 0$, para garantir injectividade.