1.2 Axioma do Supremo

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verifique que se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então n^2 é também ímpar. O que pode concluir de $n \in \mathbb{N}$ sabendo que n^2 é par?

   RESOLUÇÃO

   Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar, com $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ é ímpar, uma vez que $4k^2+4k$ é par para qualquer k.

   Conclui-se que se n^2 é par, n também será.

2. a) Verifique que se x, y são números racionais, então $x+y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais. [2]

   b) Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um número irracional, então $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais.

   c) Mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

   RESOLUÇÃO:

   a) Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, ou seja $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Então, $-x = \frac{-p}{q}$, $x^{-1} = \frac{q}{p}$, $x+y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$, logo $-x$, x^{-1}, $x+y \in \mathbb{Q}$.

   b) Seja $x \neq 0$ um racional e y um irracional. Se $x+y$ fosse racional, uma vez que a soma e a subtracção de dois racionais é também racional, teriamos que $(x+y)-x$ seria racional. Mas $(x+y)-x = y$, logo y seria racional, o que contradiz a hipótese. Conclui-se que $x+y$ é irracional.

      Para mostrar $x-y$, xy e y/x são irracionais, a prova é semelhante (usando o facto da soma, divisão e multiplicação de racionais ser racional).

   c) Sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais: por exemplo: com $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

   $$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \text{etc.}$$

3. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

   $$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\right\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right],$$
   $$C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

[2] Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo algébrico. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A\cap B$, $\max A\cap B$, $\max A\cap B\cap\mathbb{Q}$, $\inf A\cap B\cap\mathbb{Q}$, $\max C$, $\max B\setminus C$.

RESOLUÇÃO

a) $x^2 + 2|x| > 3 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \ \vee \ |x| < -3 \Leftrightarrow x < -1 \ \vee \ x > 1$.

(OU: Para $x \geq 0$: $x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0$. Logo, $x \in [0,+\infty[\cap (]-\infty,-3[\cup]1,+\infty[) =]1,+\infty[$.

Para $x < 0$: $x^2 - 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) > 0$. Logo, $x \in]-\infty,0[\cap (]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[) =]-\infty,-1[$.)

Assim, $A =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

b) $\inf A$ não existe, porque A não é minorado;

$A\cap B = \left]1, \sqrt{2}\right]$: $\min A\cap B$ não existe, $\max A\cap B = \sqrt{2}$, $\max A\cap B\cap\mathbb{Q}$ não existe, já que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, e $\inf A\cap B\cap\mathbb{Q} = 1$; $\max C$ não existe; $\max B\setminus C = \sqrt{2}$.

4. Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^4-4}{|x-1|} \leq 0\right\}, \qquad B = \{x : x \geq 0 \ \wedge \ \exists_{k\in\mathbb{N}}\, kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0,+\infty[\setminus\mathbb{Q}$.

b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A\setminus B$.

RESOLUÇÃO:

a) Começamos por notar que

$$\begin{aligned}\frac{x^4-4}{|x-1|} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{|x-1|} \leq 0\\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0 \ \wedge \ |x-1| \neq 0 \quad (\text{porque } x^2+2>0 \text{ e } |x-1|\geq 0)\\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Então,

$$A = \left\{x\in\mathbb{R} : x \geq 0 \ \wedge \ x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]\setminus\{1\}\right\} = \left[0, \sqrt{2}\right]\setminus\{1\}.$$

Relativamente a B começamos por notar que se existe um $k\in\mathbb{N}$ tal que $kx\notin\mathbb{Q}$ então $x\notin\mathbb{Q}$ pois, caso contrário, $kx\in\mathbb{Q}$ para todo o $k\in\mathbb{N}$. Portanto $B\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ então $1\cdot x = x\notin\mathbb{Q}$. Portanto B é de facto o conjunto dos números irracionais positivos.

b) Notamos que $A \setminus B = \left(\left[0, \sqrt{2}\right[\setminus \{1\}\right) \cap \mathbb{Q}$. Então,

$$\sup A = \sup A \setminus B = \sqrt{2} = \max A,$$
$$\inf A = \inf A \setminus B = 0 = \min A = \min A \setminus B.$$

$A \setminus B$ não tem máximo pois $\sup A \setminus B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \frac{x^2-2}{|x|-1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

RESOLUÇÃO:

a)

$$\frac{x^2-2}{|x|-1} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2 < 2 \wedge |x| > 1) \vee (x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1)$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \wedge (x < -1 \vee x > 1),$$

uma vez que $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$, logo $x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1$ é impossível. Assim, $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) $A \cap \mathbb{Q} = \left(\left]-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right[\right) \cap \mathbb{Q}$. $\sup A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo, $\inf A \cap \mathbb{Q} = -\sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem mínimo.

$B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B = \min B = \sqrt{2}$, $\sup B$ e $\max B$ não existem, porque B não é majorado.

$B \cap \mathbb{Q}$: temos $2^{n/2} \in \mathbb{Q}$ se e só se n é par, ou seja, $B \cap \mathbb{Q} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B \cap \mathbb{Q} = \min B \cap \mathbb{Q} = 2$, $\sup B \cap \mathbb{Q}$ e $\max B \cap \mathbb{Q}$ não existem, porque B não é majorado.

6. Para $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, definimos $-A = \{-x : x \in A\}$. Justifique que A é minorado se e só se $-A$ é majorado e nesse caso temos $\inf A = -\sup(-A)$.

RESOLUÇÃO:

Temos $-A \neq \emptyset$. Por definição, A é minorado se existe $x \in \mathbb{R}$ com $x \leq a$, para todo $a \in A$. Como $x \leq a \Leftrightarrow -x \geq -a$, temos A é minorado $\Leftrightarrow -A$ é majorado. Neste caso, existem $\inf(A)$ e $\sup(-A)$. Sendo $\alpha = \inf(A)$ o maior minorante de A, temos que $-\alpha$ é o menor majorante, ie, o supremo, de $-A$.

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $s = \sup A$. Se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset$, então A tem máximo.

   RESOLUÇÃO:

   Como $s = \sup A$, sabemos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$. Como $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset = (V_{\varepsilon_0}(s) \cap A) \setminus \{s\}$, vemos que $V_{\varepsilon_0}(s) \cap A = \{s\}$, em particular, $s \in A$ e A tem máximo.

8. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$.

   RESOLUÇÃO:

   Se m é majorante de A e $m \neq \sup A$ então $m > \sup A$. Tem-se $x \leq \sup A < m$, para qualquer $x \in A$, logo, para $0 < \varepsilon < m - \sup A$, $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$.

9. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

   RESOLUÇÃO:

   Se B é majorado e $A \subset B$, então A é majorado e qualquer majorante de B é majorante de A (directamente da definição de majorante). Por outro lado $A \neq \emptyset \wedge A \subset B \Rightarrow B \neq \emptyset$. Logo como A e B são majorados e não-vazios, o axioma do supremo garante que $\sup A$ e $\sup B$ existem. Como $\sup B$ é majorante de B será também majorante de A, logo $\sup A \leq \sup B$.

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt