Exercícios Resolvidos de

Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Responsável: João Teixeira Pinto
Em colaboração com
Prof. Catarina Carvalho

1 NÚMEROS REAIS E SUCESSÕES

1.1 Método de Indução Matemática

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.[1]

   b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$.

   c) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a - 1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

   d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   RESOLUÇÃO:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

   Para $n = 1$, temos $2 \cdot 1 - 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
   Tese (a provar): $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$.
   Usando a hipótese de indução, temos:

   $$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

   como queríamos mostrar.

   (Alternativamente, podemos escrever $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1)$ e usar o facto $\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) + 2(n + 1) - 1$.)

   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma de somatório como $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$. Ver exercicios seguintes.

Para $n = 1$, temos $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
Tese (a provar): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.
Usando a hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.
(Alternativamente: usando somatórios).

c) Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$:

Para $n = 0$, a condição acima fica $a - 1 = a - 1$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1} - 1$.
Tese: $(a-1)(1+a+\cdots+a^n+a^{n+1}) = a^{n+2} - 1$.
Simplificando o lado esquerdo da igualdade acima, temos que

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) = \quad (a-1)(1+a+\cdots+a^n) + (a-1)a^{n+1}.$$

Usando a hipótese de indução, temos agora

$$\begin{aligned}(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) &= a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1}. \\ &= a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1} \\ &= a^{n+2} - 1,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, a condição fica $\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{1+1!} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.
Tese: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$.

Usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)+\left(\frac{n+1}{(n+2)!}\right)\\ &= 1-\frac{n+2-n-1}{(n+2)!}\\ &= 1-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

2. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   b) $2n-3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.
   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.
   d) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   RESOLUÇÃO:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos que $3! \geq 4$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \in \mathbb{N}$, temos $(n+2)! \geq 2^{2n}$.
Tese: $(n+3)! \geq 2^{2n+2}$.
Temos que $(n+3)! \geq 2^{2n+2} \Leftrightarrow (n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$. Como, por hipótese de indução, $(n+2)! \geq 2^{2n}$ e, para $n \geq 1$, $n+3 \geq 4 > 0$, temos então que

$$(n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$$

como queríamos mostrar.

   b) $2n-3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$:

Para $n = 5$, temos que $10 - 3 < 2^3 \Leftrightarrow 7 < 8$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $2n - 3 < 2^{n-2}$.
Tese: $2(n+1) - 3 < 2^{(n+1)-2}$.
Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade acima e usando a hipótese, temos

$$2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = (2n-3) + 2 < 2^{n-2} + 2,$$

Como, para $n \geq 5$, temos $2 < 2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2} + 2 < 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Logo

$$2(n+1) - 3 < 2^{n-1}.$$

c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$:

Para $n = 4$, temos $(4!)^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$, que uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, temos $(n!)^2 > 2^n n^2$.
A provar: $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2$.
Temos $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n+1)^2(n!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n!)^2 > 2^n \cdot 2$. Por hipotese, $(n!)^2 > 2^n n^2$ e como $n^2 > 2$, se $n \geq 4$, o resultado segue (da propriedade transitiva).

d) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $7^1 - 1 = 6$, que é divisível por 6.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ é divisível por 6. Isto significa que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $6k = 7^n - 1$.
Tese: $7^{n+1} - 1$ é divisível por 6, isto é, existe um natural positivo j tal que $7^{n+1} - 1 = 6j$.
Então:

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(7^n - 1 + 1) - 1 = 7(6k+1) - 1 = 6 \cdot 7k + 7 - 1 = 6(7k+1)$$

em que na terceira igualdade usámos a hipótese de indução. Demonstrámos então a tese com $j = 7k + 1$.

3. Prove por indução matemática que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$.

RESOLUÇAO

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Tese (a provar): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

Temos, usando a HI na segunda igualdade:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}
\end{aligned}$$

já que $(n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^{1} \frac{5-2k}{3^k} = 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$.

Tese (a provar): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n}{3^{n+1}}$.

Temos, usando a HI na segunda igualdade:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{5-2k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} + \frac{5-2(n+1)}{3^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{n-1}{3^n} + \frac{3-2n}{3^{n+1}} = 1 + \frac{3n-3+3-2n}{3^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{n}{3^{n+1}},
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

1.2 Axioma do Supremo

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Verifique que se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então n^2 é também ímpar. O que pode concluir de $n \in \mathbb{N}$ sabendo que n^2 é par?

   RESOLUÇÃO

   Seja $n \in \mathbb{N}$ ímpar, com $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ é ímpar, uma vez que $4k^2 + 4k$ é par para qualquer k.

   Conclui-se que se n^2 é par, n também será.

2. a) Verifique que se x, y são números racionais, então $x + y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais. [2]

   b) Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um número irracional, então $x + y$, $x - y$, xy e y/x são irracionais.

   c) Mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

   RESOLUÇÃO:

   a) Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, ou seja $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, com $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Então, $-x = \frac{-p}{q}$, $x^{-1} = \frac{q}{p}$, $x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+rq}{qs}$, logo $-x, x^{-1}, x + y \in \mathbb{Q}$.

   b) Seja $x \neq 0$ um racional e y um irracional. Se $x + y$ fosse racional, uma vez que a soma e a subtracção de dois racionais é também racional, teriamos que $(x + y) - x$ seria racional. Mas $(x + y) - x = y$, logo y seria racional, o que contradiz a hipótese. Conclui-se que $x + y$ é irracional.

      Para mostrar $x - y$, xy e y/x são irracionais, a prova é semelhante (usando o facto da soma, divisão e multiplicação de racionais ser racional).

   c) Sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais: por exemplo: com $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

   $$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \text{etc.}$$

3. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\right\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right],$$
$$C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

[2] Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo algébrico. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A\cap B$, $\max A\cap B$, $\max A\cap B\cap \mathbb{Q}$, $\inf A\cap B\cap \mathbb{Q}$, $\max C$, $\max B\setminus C$.

RESOLUÇÃO

a) $x^2 + 2|x| > 3 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \lor |x| < -3 \Leftrightarrow x < -1 \lor x > 1$.
(OU: Para $x \geq 0$: $x^2 + 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0$. Logo, $x \in [0, +\infty[\cap (]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[) =]1, +\infty[$.
Para $x < 0$: $x^2 - 2x > 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) > 0$. Logo, $x \in]-\infty, 0[\cap (]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[) =]-\infty, -1[$.)
Assim, $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

b) $\inf A$ não existe, porque A não é minorado;
$A \cap B = \left]1, \sqrt{2}\right]$: $\min A \cap B$ não existe, $\max A \cap B = \sqrt{2}$, $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$ não existe, já que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, e $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q} = 1$; $\max C$ não existe; $\max B \setminus C = \sqrt{2}$.

4. Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : x \geq 0 \ \land \ \frac{x^4 - 4}{|x-1|} \leq 0\right\}, \qquad B = \{x : x \geq 0 \ \land \ \exists_{k\in\mathbb{N}}\ kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus\mathbb{Q}$.

b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

RESOLUÇÃO:

a) Começamos por notar que

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - 4}{|x-1|} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{|x-1|} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0 \ \land \ |x-1| \neq 0 \quad (\text{porque } x^2 + 2 > 0 \text{ e } |x-1| \geq 0) \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

Então,

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \ \land \ x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}\right\} = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.$$

Relativamente a B começamos por notar que se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $kx \notin \mathbb{Q}$ então $x \notin \mathbb{Q}$ pois, caso contrário, $kx \in \mathbb{Q}$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Portanto $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então $1 \cdot x = x \notin \mathbb{Q}$. Portanto B é de facto o conjunto dos números irracionais positivos.

b) Notamos que $A \setminus B = \left(\left[0, \sqrt{2}\right[\setminus \{1\}\right) \cap \mathbb{Q}$. Então,

$$\sup A = \sup A \setminus B = \sqrt{2} = \max A,$$
$$\inf A = \inf A \setminus B = 0 = \min A = \min A \setminus B.$$

$A \setminus B$ não tem máximo pois $\sup A \setminus B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

RESOLUÇÃO:

a)

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0 &\Leftrightarrow (x^2 < 2 \wedge |x| > 1) \vee (x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1) \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \wedge (x < -1 \vee x > 1),\end{aligned}$$

uma vez que $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$, logo $x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1$ é impossível. Assim, $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) $A \cap \mathbb{Q} = \left(\left]-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right[\right) \cap \mathbb{Q}$. $\sup A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo, $\inf A \cap \mathbb{Q} = -\sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem mínimo.

$B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B = \min B = \sqrt{2}$, $\sup B$ e $\max B$ não existem, porque B não é majorado.

$B \cap \mathbb{Q}$: temos $2^{n/2} \in \mathbb{Q}$ se e só se n é par, ou seja, $B \cap \mathbb{Q} = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. $\inf B \cap \mathbb{Q} = \min B \cap \mathbb{Q} = 2$, $\sup B \cap \mathbb{Q}$ e $\max B \cap \mathbb{Q}$ não existem, porque B não é majorado.

6. Para $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, definimos $-A = \{-x : x \in A\}$. Justifique que A é minorado se e só se $-A$ é majorado e nesse caso temos $\inf A = -\sup(-A)$.

RESOLUÇÃO:

Temos $-A \neq \emptyset$. Por definição, A é minorado se existe $x \in \mathbb{R}$ com $x \leq a$, para todo $a \in A$. Como $x \leq a \Leftrightarrow -x \geq -a$, temos A é minorado $\Leftrightarrow -A$ é majorado. Neste caso, existem $\inf(A)$ e $\sup(-A)$. Sendo $\alpha = \inf(A)$ o maior minorante de A, temos que $-\alpha$ é o menor majorante, ie, o supremo, de $-A$.

7. Seja $A \subset \mathbb{R}$ e $s = \sup A$. Se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset$, então A tem máximo.

   RESOLUÇÃO:

   Como $s = \sup A$, sabemos que, para qualquer $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(s) \cap A \neq \emptyset$. Como $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset = (V_{\varepsilon_0}(s) \cap A) \setminus \{s\}$, vemos que $V_{\varepsilon_0}(s) \cap A = \{s\}$, em particular, $s \in A$ e A tem máximo.

8. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$.

   RESOLUÇÃO:

   Se m é majorante de A e $m \neq \sup A$ então $m > \sup A$. Tem-se $x \leq \sup A < m$, para qualquer $x \in A$, logo, para $0 < \varepsilon < m - \sup A$, $V_\varepsilon(m) \cap A = \emptyset$.

9. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

   RESOLUÇÃO:

   Se B é majorado e $A \subset B$, então A é majorado e qualquer majorante de B é majorante de A (directamente da definição de majorante). Por outro lado $A \neq \emptyset \wedge A \subset B \Rightarrow B \neq \emptyset$. Logo como A e B são majorados e não-vazios, o axioma do supremo garante que $\sup A$ e $\sup B$ existem. Como $\sup B$ é majorante de B será também majorante de A, logo $\sup A \leq \sup B$.

1.3 Sucessões

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere as sucessões reais (u_n) e (v_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 3, \\ v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

(a) $u_n = \sqrt{2^n - 1}$, (b) $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$.

RESOLUÇÃO

(a) Para $n = 1$, temos $u_1 = \sqrt{2^1 - 1} = 1$.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2^n - 1}$.
Tese: $u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$.
Temos por hipótese, $u_n^2 = 2^n - 1$. Assim, usando a fórmula de recorrência,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 2 + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 1},$$

como queríamos mostrar.

(b) Para $n = 1$, temos $v_1 = \dfrac{3^1}{(1!)^2} = 3$.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$ (i.e $P(n)$ é verdadeira) e queremos provar:
Tese: $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$.
Temos por hipótese, $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$. Usando a fórmula de recorrência,

$$v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2} = \frac{3\frac{3^n}{(n!)^2}}{(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$$

como queríamos mostrar.

2. Considere as sucessões definidas da seguinte forma, com $a, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = r + u_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = a, \\ v_{n+1} = rv_n. \end{cases}$$

(A sucessão (u_n) é uma *progressão aritmética* de primeiro termo a e razão r e a sucessão (v_n) é uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e razão r.)

a) Mostre por indução matemática que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Dê exemplos de valores de r e de a tais que (i) (u_n) seja monótona crescente; (ii) (u_n) seja monótona decrescente; (iii) (v_n) seja monótona crescente; (iv) (v_n) não seja monótona.

c) Mostre que (u_n) não é limitada, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Para que valores de r e a será (v_n) limitada? E convergente?

RESOLUÇÃO

Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, e (u_n), (v_n) sucessões tais que $u_1 = a$, $u_{n+1} = r + u_n$ e $v_1 = a$, $v_{n+1} = rv_n$.

a) Mostrar que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$:
Vamos considerar só a progressão aritmética (u_n):
- $n = 1$: $u_1 = a = a + (1-1)r$.
- Hipótese de indução: $u_n = a + (n-1)r$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $u_{n+1} = a + nr$. Então, por hipótese,

$$u_{n+1} = r + u_n = r + a + (n-1)r = a + nr.$$

b) (i) (u_n) monótona crescente: em geral, $u_{n+1} - u_n = r$, logo (u_n) será monótona crescente sse $r \geq 0$, com a qualquer (se $r = 0$, (u_n) é a sucessão constante igual a a). Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3 + u_n$.

(ii) (u_n) monótona decrescente: $r \leq 0$, a qualquer. Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = -3 + u_n$.

(iii) (v_n) monótona crescente: em geral, $v_{n+1} - v_n = ar^n - ar^{n-1} = ar^{n-1}(r-1)$. Logo, (v_n) será monótona crescente sse $a \geq 0 \wedge r \geq 1$ ou $a \leq 0 \wedge 0 \leq r \leq 1$ (se $r < 0$, r^{n-1} muda de sinal, e (v_n) não é monótona). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = 3v_n$, $v_1 = -2$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$,

(iv) (v_n) não seja monótona: de (iii), (v_n) não é monótona sse $r < 0$ (a qualquer). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = -3v_n$.

c) (u_n) não é limitada: temos, por a), $u_n = a + (n-1)r$, logo dado $b \in \mathbb{R}$ qualquer, para $r > 0$,

$$u_n > b \Leftrightarrow n > \frac{b-a}{r} + 1$$

e portanto (u_n) não é majorada. Se $r < 0$, (u_n) não será minorada.
Quanto a (v_n), de a), $v_n = ar^{n-1}$, logo (v_n) será limitada/convergente sse r^{n-1} for limitada/convergente, ou seja, será limitada para $-1 \leq r \leq 1$, convergente para $-1 < r \leq 1$, a qualquer.

3. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

a) $\dfrac{n^2}{n^2+1} \to 1.$ b) $\dfrac{n+3}{n+2} \not\to \frac{3}{2}.$

RESOLUÇÃO:

a) Seja $\varepsilon > 0$. Para determinarmos os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais $\frac{n^2}{n^2+1}$ está a uma distância do (suposto) limite 1 menor do que ε, resolvemos

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Se $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0 \Leftrightarrow \varepsilon < 1$, temos então

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Se $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \geq 1$, então $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Demonstrou-se assim que, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, pode tomar-se $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$$

ou seja, $\dfrac{n^2}{n^2+1} \to 1.$

(a) Para determinar a distância de $u_n = \frac{n+3}{n+2}$ a $\frac{3}{2}$,

$$\left|\frac{n+3}{n+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|1 + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}$$

(dado que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} < 0$, para qualquer n). Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$|u_n - \frac{3}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in V_\varepsilon(3/2) \Leftrightarrow -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Se $\varepsilon \geq 1/2$ esta condição verifica-se para qualquer $n \in \mathbb{N}$, mas se $\varepsilon < 1/2$, temos $u_n \in V_\varepsilon(3/2) \Leftrightarrow n < \frac{1}{1/2-\varepsilon} - 2$, ou seja, só se verifica (no máximo) para um conjunto finito de valores de n, e portanto $3/2$ não é limite de u_n.

4. Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão

limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que x_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.
RESOLUÇÃO:

De $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n} \Rightarrow y_n - 1 < x_n < y_n + 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < b + 1$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < y_n < b$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo (x_n) é limitada. Como é monótona, será convergente. De $x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}$, e $\lim(x_n + \frac{1}{n}) = \lim(x_n - \frac{1}{n}) = \lim x_n$, conclui-se do critério das sucessões enquadradas, que (y_n) é convergente e $\lim y_n = \lim x_n$.

5. Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

RESOLUÇÃO:

$u_n = \cos(n!\pi)$: como, para $n > 1$, $n!$ é um número natural par, temos $\cos(n!\pi) = 1$, para qualquer $n > 1$. Logo, (u_n) é convergente, com $\lim u_n = 1$,

$v_n = \dfrac{n\cos(n\pi)}{2n+1}$: temos $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$, logo (v_n) terá dois sublimites diferentes, $\frac{1}{2}$ e $-\dfrac{1}{2}$, e não é convergente.

$w_n = \dfrac{1+a^n}{1+a^{2n}}$ $(a \in \mathbb{R})$. Tem-se $\lim w_n = 1$ se $|a| < 1$ ou $a = 1$, não tem limite se $a = -1$, $\lim w_n = 0$ se $|a| > 1$.

6. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.
RESOLUÇÃO:

Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = a$, serão também as suas subsucessões (u_{2n}) e (u_{2n+1}), com $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$. Por outro lado,

$$u_{2n} \in]0,1[\Rightarrow a \in [0,1],$$

$$u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[=]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\Rightarrow a \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$

Logo, $a \in \{0,1\}$.

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

7. Sejam A e B os conjuntos $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo:

a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.

b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

RESOLUÇÃO:

a) Falso: por exemplo, $u_n = 3 + (-1)^n$, é limitada, tem termos em A e não é convergente, uma vez que tem dois sublimites diferentes: 2 e 4.

b) Verdadeiro: se (u_n) é monótona e tem termos em $A \cap V_{1/2}(0)$, será monótona e limitada, logo convergente em $\mathbb{R}$.

c) Verdadeiro: se (u_n) é uma sucessão de termos em $A \cup B$ com $\lim u_n = a < 0$ então $u_n < \frac{a}{2}$ a partir de certa ordem. Em particular, $u_n \in B$ e o conjunto $B \cap \{x : x < \frac{a}{2}\}$ é finito. Logo (u_n) não poderia ser estritamente decrescente.

8. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

a) Mostre que $u_n \in \mathbb{Q}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (Sug. Use indução).

b) Assumindo que (u_n) é convergente, mostre que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

RESOLUÇÃO:

a) Por indução: $u_1 = 2 \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, se $u_n \in \mathbb{Q}$, então $u_n/2 \in \mathbb{Q}$ e também o seu inverso $1/u_n \in \mathbb{Q}$. Logo, $u_{n+1} \in \mathbb{Q}$, sendo a soma de dois racionais.

b) Se u_n é convergente, com $u_n \to L$, então também temos $u_{n+1} \to L$ (dado que u_{n+1} é subsucessão de u_n). Tomando o limite de ambos os lados da expressão de recorrência:

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}\right) \Rightarrow L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 2 \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{2}.$$

É fácil ver (por indução outra vez) que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $L = -\sqrt{2}$ é impossível. Conclui-se que $L = \sqrt{2}$.

9. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = a, \qquad u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1},$$

com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que se (u_n) é convergente então $\lim u_n = 0$.

RESOLUÇÃO:

Seja (u_n) tal que $u_1 = a$, para $a \in \mathbb{R}$, e $u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1}$. Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = l$, temos que

- $\frac{u_n}{n+1}$ é convergente, com $\lim \frac{u_n}{n+1} = \lim u_n \cdot \frac{1}{n+1} = l \cdot 0 = 0$
- (u_{n+1}) é convergente, uma vez que é uma subsucessão de (u_n), com $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$.

Logo, $(-1)^n u_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{n+1}$ é também convergente. Mas, considerando as subsucessão dos termos pares e dos termos ímpares, temos $(-1)^{2n} u_{2n} = u_{2n} \to l$ e $(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \to -l$. Como $(-1)^n u_n$ converge, tem-se $l = -l \Leftrightarrow 2l = 0 \Leftrightarrow l = 0$, como queríamos mostrar.

10. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.
c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

RESOLUÇÃO:

a) $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$ temos $u_0 = 1 \leq 2$. Supondo $u_n \leq 2$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, consideremos u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Por indução conclui-se que $u_n \leq 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) é uma sucessão crescente:
Com $n \geq 0$ e tendo em conta a alínea (a):

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$$

e portanto (u_n) é uma sucessão crescente.

c) De (a) e (b) decorre que (u_n) é crescente e majorada, pelo que é convergente. Da definição de (u_n), e uma vez que sendo (u_{n+1}) uma subsucessão de (u_n), teremos (u_{n+1}) convergente com $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, segue que

$$\lim u_n = 1 + \frac{\lim u_n}{2}.$$

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

Resolvendo a equação em ordem a $\lim u_n$, obtem-se

$$\lim u_n - \frac{\lim u_n}{2} = 1 \Leftrightarrow \lim u_n = 2.$$

11. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente e calcule $\lim u_n$. (Sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$.)

    RESOLUÇÃO:

Notemos que, se $x > 1$, então $0 < \frac{1}{x} < 1$ e, portanto $1 < 2 - \frac{1}{x} < 2$. Como $u_1 > 1$, concluimos que $1 < u_2 < 2$. Por outro lado, se, como hipótese de indução, considerarmos $1 < u_n < 2$, então, usando o mesmo argumento concluimos que $1 < u_{n+1} < 2$. Provamos assim que $\forall_{n \in \mathbb{N}_2}$, $1 < u_n < 2$, e que, portanto, a sucessão é limitada.

Como $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = -\frac{(u_n-1)^2}{u_n} < 0$, dado que, como vimos $u_n > 1$, concluimos que u_n é decrescente. Logo a sucessão é monótona e limitada e, portanto, convergente.

Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad l = 2 - \frac{1}{l} \quad \Leftrightarrow \quad l = 1.$$

12. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

    a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
    b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
       (Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n + \sqrt{2+u_n}}$.)
    c) Justifique que (u_n) é convergente.
    d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

    RESOLUÇÃO:

a) $1 \leq u_n < 2$, para $n \in \mathbb{N}$:
   - $n = 1$: $u_1 = 1$, logo $1 \leq u_1 < 2$ é uma proposição verdadeira.
   - Hipótese de indução: $1 \leq u_n < 2$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $1 \leq u_{n+1} < 2$. Como $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, usando a hipótese de indução temos $\sqrt{2+1} \leq u_{n+1} < \sqrt{2+2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$.

b) (u_n) é crescente: vamos usar indução matemática para mostrar que $u_{n+1} \geq u_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, logo $u_2 > u_1$ é uma proposição verdadeira.
- Hipótese de indução: $u_{n+1} \geq u_n$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Temos $u_{n+2} = \sqrt{2 + u_{n+1}}$, e, de $u_{n+1} \geq u_n$, vem que $\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$, ou seja, que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, como queriamos mostrar.

c) (u_n) é monótona crescente e limitada, logo convergente.

d) Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 = 2 + l \wedge l \geq 0 \Leftrightarrow l = 2.$$

13. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

a) $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

b) $\dfrac{n^2+1}{n} \to +\infty$.

RESOLUÇÃO:

a) Por definição, $u_n \to -\infty$ em $\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > p$, $u_n < -\frac{1}{\varepsilon}$[3]. Seja então $\varepsilon > 0$ dado,

$$1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2.$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$. para $n > p$, temos $1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\varepsilon}$. Logo $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

14. a) Mostre que:

i) se $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ então $\frac{1}{u_n} \to 0$,

ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Será verdade que $u_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \vee \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$?

RESOLUÇÃO:

a) i) Por definição, $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > p$, $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Neste caso, temos $u_n > 0$, para $n > p$, logo

$$n > p \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} < \varepsilon,$$

e assim $\frac{1}{u_n} \to 0$.

b) Não. Por exemplo, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ e $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ não é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$.

15. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\dfrac{n^n}{1000^n}$,

b) $\dfrac{(2n)!}{n!}$

c) $n^{n+1} - n^n$

d) $3^n - (2n)!$

e) $(n! - n^{1000})^n$

f) $\dfrac{n^{1000}}{1.0001^n}$

g) $\dfrac{5^n - n^4}{3^n + n!}$

h) $\dfrac{n^n - n!}{3^n + n^4 + 2}$.

RESOLUÇÃO:

a) $\dfrac{n^n}{1000^n} = \left(\dfrac{n}{1000}\right)^n$. Como $\lim \dfrac{n}{1000} = +\infty$, temos $\lim \dfrac{n^n}{1000^n} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{1000^{n+1}}}{\frac{n^n}{1000^n}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{1000^n}{1000^{n+1}} = \frac{(n+1)}{1000} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{n^n}{1000^n} = +\infty$.

b) $\dfrac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots(n+n) > n^n$. Como $\lim n^n = +\infty$, então $\lim \dfrac{(2n)!}{n!} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$.

c) $\lim n^{n+1} - n^n = \lim n^n(n-1) = +\infty$.

d) $\lim 3^n - (2n)! = \lim (2n)!\left(\frac{3^n}{(2n)!} - 1\right) = -\infty$, ja que pela escala de sucessoes $a^n << n!$ para qualquer $a > 1$, e $n! << (2n)!$.

e) $\lim (n! - n^{1000})^n = \lim \left(\frac{n!}{n^{1000}} - 1\right)^n n^{1000n} = +\infty$.

f) Como, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c > 1$, $\lim \frac{n^\alpha}{c^n} = 0$, tem-se $\lim \frac{n^{1000}}{1.0001^n} = 0$.

g) $\lim \dfrac{5^n - n^4}{3^n + n!} = \lim \dfrac{5^n(1 - n^4/5^n)}{n!(3^n/n! + 1)} = \lim \dfrac{5^n}{n!} = 0$, já que pela escala de sucessões $a^n << n!$ e $n^p << a^n$, $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$.

h) $\lim \dfrac{n^n - n!}{3^n + n^4 + 2} = \lim \dfrac{n^n(1 - n!/n^n)}{3^n(1 + n^4/3^n + 2/3^n)} = +\infty$, já que $n! << n^n$, $3^n << n^n$ e $n^4 << 3^n$.

2 LIMITE E CONTINUIDADE

2.1 Funções elementares

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

   a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

   b) $f(x) = 2\,\text{sen}\,x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   RESOLUÇÃO

2. a) Como e^x é crescente, com contradomínio $]0, +\infty[$, o contradomínio de f é $]e^{-2}, +\infty[$. Para $x > 0$ e $y \in \left]e^{-2}, +\infty\right[$, temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x^2-2} = y \Leftrightarrow x^2 - 2 = \ln y \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln y + 2}.$$

   Logo, a inversa de f é

$$f^{-1} : \left]e^{-2}, +\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \sqrt{\ln y + 2},$$

   com contradomínio $CD_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}^+$.

   b) O contradomínio de sen restrito a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é $\text{sen}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, logo o contradomínio de f é $[-2, 2]$. Para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-2, 2]$, temos

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x = y \Leftrightarrow x = \text{arcsen}\,\frac{y}{2}$$

   (note-se que $\frac{y}{2} \in [-1, 1]$, que é o domínio de $\text{arcsen}\,x$). Logo a inversa de f é

$$f^{-1} : [-2, 2] \to \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = \text{arcsen}\,\frac{y}{2}.$$

   com contradomínio $CD_{f^{-1}} = D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Deduza as seguintes identidades:

a) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$,

b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$.

RESOLUÇÃO

a) Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Queremos calcular $\cos\alpha$. De $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, temos $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$. Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\alpha \geq 0$, vem

$$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}.$$

b) Sai de a) e de $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ (que vem da definição de função inversa), uma vez que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.
Para ver directamente Se $\alpha = \operatorname{arcsen} x$, $x \neq \pm 1$, então $\operatorname{sen}\alpha = x$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Queremos calcular $\operatorname{tg}\alpha$. De $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ temos

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}.$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{|x|}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\operatorname{sen}\alpha \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \geq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\operatorname{sen}\alpha \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$. Como $\operatorname{tg}\alpha \leq 0$, temos

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

a) Se f é crescente (resp. decrescente), então g é crescente (resp. decrescente).

b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

c) arcsen, arctg são crescentes e ímpares, arcos é decrescente.

RESOLUÇÃO

$f : D \to \mathbb{R}$ função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa.

a) Seja f crescente. Como f é injectiva, f é estritamente crescente. Logo, para $x, x' \in D$, $x > x' \Leftrightarrow f(x) > f(x')$. Então, para $y, y' \in f(D)$, $y = f(x)$, com $y' = f(x')$ (ou seja, $g(y) = x$, $g(y') = x'$) temos

$$y > y' \Leftrightarrow f(x) > f(x') \Leftrightarrow x > x' \Leftrightarrow g(y) > g(y').$$

Logo g é (estritamente) crescente.

b) Para $y \in f(D)$, seja $x \in D$, com $y = f(x)$, ou seja, tal que $g(y) = x$. Então $-y = -f(x) = f(-x)$, porque f é ímpar, logo $g(-y) = -x$, e assim $g(-y) = -x = -g(y)$, e g é ímpar.

c) Directamente de a), b) e das propriedades de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

5. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para as funções trigonométricas):
   i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
   ii) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$
   iii) $\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$

b) Verifique que a função sh é ímpar, a função ch é par e que

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = e^x.$$

Esboce os gráficos de ch e sh a partir dos gráficos de e^x e e^{-x} (verifique que $\operatorname{ch} x \geq 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$).

c) As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por argsh e argch, em que

$$x = \operatorname{sh} y \Leftrightarrow y = \operatorname{argsh} x, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$x = \operatorname{ch} y \Leftrightarrow y = \operatorname{argch} x, \quad y \in \mathbb{R}^+.$$

Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}).$$

RESOLUÇÃO

a) i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \dfrac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \dfrac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1;$

   iv) $2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\,\dfrac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{4} = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x;$

   v) De i) e ii), temos $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$. Logo, $\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$.

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

b) Resulta directamente da definição.

c) Temos $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente, logo a sua inversa $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh} x = y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Leftrightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0 \\ \Leftrightarrow e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \Leftrightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Como $e^y > 0$, temos

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Para argch, é semelhante, sendo que temos de restringir $\operatorname{ch} y$ a $y \geq 0$, para garantir injectividade.

2.2 Limite de funções em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre, recorrendo à definição de limite em $\mathbb{R}$, que para a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ se tem $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. [1].

   RESOLUÇÃO

Por definição, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ se dado $\delta > 0$ qualquer, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Para $f(x) = x^2 + 1$: dados $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, temos

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 + 1 - a^2 - 1| = |x^2 - a^2| = |x + a||x - a| \leq (|x| + |a|)|x - a|.$$

Se $|x - a| < \varepsilon$, (constatando que então, $|x| = |(x - a) + a| \leq |x - a| + |a| < \varepsilon + |a|$), resulta, nesse caso,

$$|f(x) - f(a)| < (\varepsilon + |a| + |a|)|x - a| < (2|a| + \varepsilon)\varepsilon \leq (2|a| + 1)\varepsilon,$$

escolhendo sempre $\varepsilon \leq 1$. Assim, para que $|f(x) - f(a)| < \delta$, por transitividade, é suficiente escolher $1 \geq \varepsilon > 0$ tal que

$$(2|a| + 1)\varepsilon < \delta \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\delta}{2|a| + 1}.$$

Neste caso, temos então, $|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$.

2. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ para mostrar que

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, b) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

   RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\delta > 0$ arbitrário (ou um $R > 0$, suficientemente grande, $R = 1/\delta$), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x - 0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta}.$$

Então, dado $\delta > 0$, temos

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x^2 < \delta \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\delta}.$$

Tomando, por exemplo, $\varepsilon = \sqrt{\delta}$, mostramos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

[1] Em particular, f é contínua em qualquer $a \in \mathbb{R}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$: temos de mostrar que dado $\delta>0$ arbitrário, existe $\varepsilon>0$ tal que

$$x>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\sqrt{x}>\frac{1}{\delta}.$$

Dado $\delta>0$, temos

$$\sqrt{x}>\frac{1}{\delta}\Leftrightarrow x>\frac{1}{\delta^2}.$$

Tomando, por exemplo, $\varepsilon=\delta^2$, mostramos que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$.

3. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(2x+1)}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^7}$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{sen}x}-1}{\operatorname{sen}x}$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x\arccos x}$,

k) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{arcsen}x}$,

l) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2x}$,

RESOLUÇÃO

a) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+1}{x+1}=1;$

b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x}{(x-2)}=-1;$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}x=1\cdot0=0$, uma vez que $\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$ (com $y=x^2$).

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(2x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\ln(2x+1)}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, uma vez que $\displaystyle\lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(y+1)}=1$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}=1$ (tomando $y=1/x\to0^+$, se $x\to+\infty$).

f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1.$

g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\sqrt{x}=1\cdot0=0.$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^7}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^5}\frac{1}{(x-1)^2}=1\cdot\frac{1}{0^+}=+\infty$ (tomando $y=(x-1)^5\to 0$, se $x\to 1$).

i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{sen}x}-1}{\operatorname{sen}x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$, tomando $y=\operatorname{sen}x\to 0$, se $x\to 0$.

j) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x\arcos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}\frac{5}{\cos 5x\arcos x}=1\cdot\frac{5}{\frac{\pi}{2}}=\frac{10}{\pi}$, uma vez que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

k) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arcsen}x}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{y}=1$, fazendo a mudança de variável $y=\operatorname{arcsen}x\to 0$, se $x\to 0$.

l) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{1-u}=-\frac{1}{2}$, fazendo a mudança de variável $u=\cos x\to 1$, se $x\to 0$ e usando $\lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{u-1}=1$.

4. (a) Mostre que se $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to a}g(x)=c\in\mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)^{f(x)}=e^c.$$

(b) Utilize o resultado anterior para calcular os limites das sucessões seguintes, com $c\in\mathbb{R}$:

$$\lim\left(1+\frac{c}{n}\right)^n,\quad \lim\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!},\quad n\in\mathbb{N}.$$

RESOLUÇÃO

(a) O limite dado é uma indeterminação da forma 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)^{f(x)}=\lim_{x\to a}e^{f(x)\ln\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)}=e^c,$$

já que, fazendo $y=\frac{g(x)}{f(x)}\to 0$, quando $x\to a$,

$$\lim_{x\to a}f(x)\ln\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\lim_{x\to a}g(x)\frac{\ln\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)}{\frac{g(x)}{f(x)}}=c\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=c.$$

(b) Fazendo $f(x)=x$ e $g(x)=c$ e $a=+\infty$, temos

$$\lim\left(1+\frac{c}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x=e^c.$$

Quanto ao segundo limite, note-se que $\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}$ é subsucessão de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, logo o seu limite é e.

5. Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}$, a função f verifica a condição

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique abreviadamente as respostas.

RESOLUÇÃO

Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$, temos

$$\lim f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0^-), \quad \lim f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0^+).$$

Então,

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow f(0^-) + f(0^+) = 1.$$

Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, temos $f(0^-) = f(0^+) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Como $f(0^-) + f(0^+) = 1$, temos $2\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

6. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2} d(x)$, onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet ($d(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

   a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?
   b) Estude $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
   c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe, $\lim_{x\to a} f(x)$.

RESOLUÇÃO

Temos

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2} d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le 0, \\ 0, & \text{se } x > 0 \ \wedge x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x > 0 \ \wedge x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Para $x \le 0$, temos $f(x) = 0$, logo $f(]-\infty, 0]) = \{0\}$. Para $x > 0$ temos $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$. Logo $f(]0, +\infty[= \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Assim, $CD_f = f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. A função não é majorada, uma vez que $\mathbb{Q}^+$ não é majorado, é minorada por 0.

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 0 = 0$;
   $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ não existe: se $x_n = \sqrt{2}n$ então $f(x_n) = 0$, se $z_n = n$ então $f(z_n) = n \to +\infty$.

c) Se $a < 0$: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 0 = 0$ e da mesma forma $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$. Quanto a $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: para $x > 0$, temos $0 \le f(x) \le x$, logo $f(x) \to 0$, $x \to 0^+$ (ou $\lim_{x\to 0^+, x\in\mathbb{Q}} f(x) = \lim_{x\to 0^+, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} f(x) = 0$). Logo se $a = 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

Para $a > 0$: não existe limite. Para verificar, toma-se por exemplo $x_n = a + \frac{1}{n} \to a$. Se $a \in \mathbb{Q}$, então $x_n \in \mathbb{Q}$ e $f(x_n) = x_n \to a$. Por outro lado, tomando $z_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a$, então $z_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $f(z_n) = 0 \to 0$. Logo $\lim f(z_n) \neq \lim f(x_n)$, logo não existe $\lim_{x\to a} f(x)$. Se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, procede-se de forma semelhante.

7. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $T > 0$, então não existem $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. (Sug. considere sucessões $x_n = x + n\pi \to +\infty$ e $z_n = z + n\pi \to +\infty$, $f(x) \neq f(z)$.)

   RESOLUÇÃO

Fazendo $x_n = x + n\pi \to +\infty$ e $z_n = z + n\pi \to +\infty$, com $x, z \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \neq f(z)$ (como $T > 0$, f não é constante), se existisse $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, teríamos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n).$$

Mas como $f(x_n) = f(x)$, $f(z_n) = f(z)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z).$$

Logo o limite não existe.

Para $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ é análogo (ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$ e $f(-x)$ periódica).

2.3 Continuidade

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$? (Relembre que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

   RESOLUÇÃO

   Sendo f e h duas funções e $a \in \mathbb{R}$, tais que h é contínua em a e f é contínua em $h(a)$, então necessariamente $g = f \circ h$ é contínua em a.

   Como tg e cotg são contínuas, respectivamente em $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ é uma função contínua em $D = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Sendo f uma função contínua em 0, temos então que $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$ é contínua em cada $a \in D$ satisfazendo $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$. Como,

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} a - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a - 1}{\operatorname{tg} a},$$

   e, portanto, $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$ equivale a $\operatorname{tg} a = \pm 1$, ou seja $a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que a função dada é necessariamente contínua nestes pontos.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

   em que $a \in \mathbb{R}$. Determine a por forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 0. Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, calcule $F(0)$.

   RESOLUÇÃO

   f é prolongável por continuidade ao ponto 0 se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, ou seja, se $f(0^+) = f(0^-)$. Temos

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = \frac{1}{2}$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} = \frac{1}{a}.$$

   Logo, $a = 2$. Se F é prolongamento por continuidade de f, então $F(x) = f(x)$ para $x \neq 0$ e $F(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ -x(x+2), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine a constante $k \in \mathbb{R}$ tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(c) Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine justificando, o contradomínio de F.

RESOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right) = \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x(x+2) = -\infty$.

(b) Temos $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$. Logo f é prolongável por continuidade a 0 sse $\ln\left(\frac{k}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

(c) Em $]-\infty, 0]$, F é dada por uma parabola, com zeros em 0 e -2, de concavidade para baixo. Logo terá um máximo em $x = -1$ dado por $F(-1) = f(-1) = 1$. Como F é contínua, o contradomínio de F em $]-\infty, 0]$ é dado por $F(]-\infty, 0]) =]-\infty, 1]$ (usando a)).

Em $\mathbb{R}^+$, $F(x) = \ln\left(\frac{2}{2+x^2}\right)$ é decrescente e $F(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, em particular 1 é o máximo (global) da função. De novo pela continuidade de F e de a), vem que $F(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 0[$ e portanto $CD_f =]-\infty, 1] \cup]-\infty, 0[=]-\infty, 1]$.

4. Seja f a função real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ \ln \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\{g(x) : x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -1$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{1+x^2} = -\infty$.

b) Em $a > 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $\ln \frac{1}{1+x^2}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

Em $a < 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $-e^{\frac{1}{x}}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

c) Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln \frac{1}{1+x^2} = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Logo existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a 0.

d) Se g é o prolongamento por continuidade de f a 0, ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \ln \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

então g é contínua em $\mathbb{R}$ (é contínua em 0 por definição, e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque f é). Logo, do Teorema de Weierstrass terá máximo (e mínimo) em qualquer intervalo limitado e fechado. Em particular, em qualquer intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$.

Como $-e^{\frac{1}{x}}$ é crescente (a exponencial é crescente, $\frac{1}{x}$ é decrescente, logo $e^{\frac{1}{x}}$ é decrescente), temos para $x \in [-\varepsilon, 0[$ que $g(x) \le g(0^-) = 0$. Por outro lado, $\ln \frac{1}{1+x^2}$ é decrescente (o logaritmo é crescente e $\frac{1}{1+x^2}$ é decrescente), logo para $x \in]0, \varepsilon]$, $g(x) \le g(0^+) = 0$. Conclui-se que $\max_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} g(x) = g(0) = 0$.

5. a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Mostre que ϕ e ψ são funções limitadas.

RESOLUÇÃO

a)
- φ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios: a função exponencial, contínua em $\mathbb{R}$ e $-\frac{1}{x^2}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo φ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ψ é dada pela diferença de duas funções: $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$. As funções $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, uma vez que são dadas pela composição de funções trigonométricas, contínuas em $\mathbb{R}$, e $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ψ também o será.

b) φ e ψ são prolongáveis por continuidade a 0 sse existir (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to 0}\varphi(x)$, e $\lim_{x\to 0}\psi(x)$, respectivamente. Para φ:

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Logo φ é prolongável por continuidade a 0. Quanto a ψ:

- $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$, uma vez que para qualquer sucessão (x_n) com $x_n \to 0$, temos

$$\lim x_n \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0$$

por ser o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada. Por outro lado,

- $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ não existe, uma vez que para $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ tem-se $\lim x_n = \lim y_n = 0$ e $\lim\cos\frac{1}{x_n} = \lim\cos(2n\pi) = 1$ e $\lim\cos\frac{1}{y_n} = \lim\cos((2n+1)\pi) = -1$. Logo $\lim_{x\to 0}\psi(x)$ não existe e ψ não é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c)
- $\varphi(x) > 0$, uma vez que a função exponencial é sempre positiva. Por outro lado, $-\frac{1}{x^2} < 0$, logo como a função exponencial é crescente, temos $e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1$. Conclui-se que $0 < \varphi(x) < 1$, e φ é limitada.
- Para ψ: $\cos\frac{1}{x}$ é limitada, com $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$. Quanto a $x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

e da mesma forma $\lim_{x\to-\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$ (aliás, a função é par). Logo, como existem em $\mathbb{R}$, os limites em $+\infty$ e $-\infty$, existe $a > 0$ tal que ψ é limitada em $[a,+\infty[$ e em $]-\infty,-a]$. Para $x \in [-a,a]$, temos

$$\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow \left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le a.$$

Logo ψ é limitada em $\mathbb{R}$. (Alternativamente, como ψ é prolongável por continuidade a 0, o Teorema de Weierstrass garante que o seu prolongamento contínuo terá máximo e mínimo em $[-a,a]$, logo será limitado e ψ, por consequência, também.)

6. Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

c) Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

RESOLUÇÃO

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = [0, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 0.$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = -\infty.$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty.$

c) $CD_f = f(D) = f([0, 1[) \cup f(]1, +\infty[)$.

- $f([0, 1[)$: se $x \in [0, 1[$, então $x - 1 < 0$ e assim $f(x) \leq 0$, ou seja, $f([0, 1[) \subset]-\infty, 0]$. Por outro lado, como $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, e f é contínua no seu domínio (por ser o quociente de funções contínuas), do Teorema do Valor Intermédio temos que $]-\infty, 0] \subset f([0, 1[)$. Logo, $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.
- $f(]1, +\infty[)$: se $x \in]1, +\infty[$, então $f(x) > 0$, ou seja $f(]1, +\infty[) \subset]0, +\infty[$. Como f é contínua em $]1, +\infty[$, e $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, temos de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, que $]0, +\infty[\subset f(]1, +\infty[)$. Logo, $f(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$.

Conclui-se que $f(D) = \mathbb{R}$.

d)
- (u_n) convergente com $(f(u_n))$ divergente: qualquer sucessão no domínio de f com $u_n \to 1$, por exemplo, $u_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ e $f(u_n) \to -\infty$.
- (v_n) divergente com $(f(v_n))$ convergente: qualquer sucessão no domínio de f com $v_n \to +\infty$, por exemplo, $u_n = n \to +\infty$ e $f(u_n) \to 0$.

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$. Mostre que existe uma única função contínua h, definida em $[a, b]$ e tal que
$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2], \quad \text{para } x \in]a, b[.$$
Determine o seu contradomínio.

RESOLUÇÃO

Seja $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$. Queremos ver que existe uma única função contínua h definida em $[a, b]$ tal que
$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2],\ x \in]a, b[.$$

Para $x \in]a, b[$: a função h já está definida, de forma única, pela fórmula acima, ou seja, definimos $h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2]$, $a < x < b$.

Para $x = a$, como h é contínua em a, temos necessariamente

$$h(a) = \lim_{x\to a^+} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2},$$

e da mesma forma

$$h(b) = \lim_{x\to b^-} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o contradomínio de h, determinamos primeiro o contradomínio de g: uma vez que g é contínua em $]a,b[$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to b} g(x) = +\infty$, tem-se do Teorema do Valor Intermédio que $g(]a,b[) = \mathbb{R}$. Conclui-se que o contradomínio de g^2 é $[0,+\infty[$ e portanto

$$h(]a,b[) = \operatorname{arctg}([0,+\infty[) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como $h(a) = h(b) = \frac{\pi}{2}$, temos então que $CD_h = h([a,b]) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

   a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$, convergente, tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

   RESOLUÇÃO

   a) Se existisse uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo n, então $\lim g(x_n) = +\infty$. Em particular, g não seria limitada em $[0,1]$, o que é impossível, do Teorema de Weierstrass, uma vez que g é contínua em $[0,1]$.

      (Alternativamente, tomando uma subsucessão (x_{p_n}) convergente de (x_n) - que existe porque x_n é limitada, Teorema de Bolzano-Weierstrass - teríamos $\lim g(x_n) = +\infty$ e $\lim g(x_{p_n}) = g(\lim x_{p_n})$, porque g é contínua. Logo $g(\lim x_{p_n}) = +\infty$, o que é absurdo.)

   b) Se (x_n) de termos em $[0,1]$ é tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo n, então $\lim g(x_n) = 0$. Seja $\lim x_n = c$. Como $(x_n) \subset [0,1]$ e este intervalo é fechado $c \in [0,1]$. Temos então $\lim g(x_n) = g(c)$ e portanto $g(c) = 0$.

9. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$, em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet (i.e, $d(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) é apenas contínua em $x = 0$.

   RESOLUÇÃO

Temos

$$f(x) = xd(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por definição: para $a \neq 0$: existe $\varepsilon > 0$, por exemplo, $\varepsilon = |a|$, tal que em qualquer vizinhança de a existem pontos x tais que $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$: se $a \in \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{Q}$.

Para $a = 0$: $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, por exemplo, $\delta = \varepsilon$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Logo f é contínua em 0.

Usando limites relativos a subconjuntos: para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} x = a,$$

$$\lim_{x \to a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} 0 = 0.$$

Conclui-se que se $a \neq 0$, $\lim_{x \to a} xd(x)$ não existe, e portanto f não é contínua em $a \neq 0$. Para $a = 0$,

$$\lim_{x \to 0, x \in \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} xd(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 0} xd(x) = 0 = f(0)$$

(já que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Logo f é contínua em 0.

10. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em a e $f(a) > 0$, então existe uma vizinhança de a, $V_\varepsilon(a)$, com $\varepsilon > 0$, tal que

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad x \in V_\varepsilon(a) \Longrightarrow f(x) > 0.$$

RESOLUÇÃO

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em a, tal que $f(a) > 0$. Então, para qualquer $\delta > 0$, existe uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$, com $\varepsilon > 0$, tal que

$$x \in V_\varepsilon(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Como $|f(x) - f(a)| < \delta \Leftrightarrow f(a) - \delta < f(x) < f(a) + \delta$, tomando $\delta > 0$ tal que $f(a) - \delta > 0 \Leftrightarrow 0 < \delta < f(a)$, o qual existe porque $f(a) > 0$, temos então que

$$x \in V_\varepsilon(a) \Longrightarrow f(x) > f(a) - \delta > 0.$$

2.4 Continuidade Global

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

   RESOLUÇÃO

   Para $x = 0$, temos $\operatorname{sen}^3 0 + \cos^3 0 = 1$ e para $x = \pi$, $\operatorname{sen}^3 \pi + \cos^3 \pi = -1$. Se $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$, então f é contínua porque é dada pela soma e produto de funções contínuas e $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -1 < 0$, logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $x \in]0, \pi[$ tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$.

2. Mostre que a equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tem pelo menos duas soluções em $\mathbb{R}$.

   RESOLUÇÃO

   Seja $f(x) = \operatorname{sen} x - x^2 + 1$, então as soluções da equação correspondem aos zeros de f. Temos $f(0) = 1$, $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$ por ser a soma de duas funções contínuas, tem-se do Teorema do Valor Intermédio / de Bolzano que existem $c_1 \in]-\pi, 0[$ e $c_2 \in]0, \pi[$ com $f(c_1) = f(c_2) = 0$.

3. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(-1) = f(1) = 0$. Mostre que f tem um ponto fixo, ou seja, que existe $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano a $h(x) = f(x) - x$.)

   RESOLUÇÃO

   Note-se que os pontos fixos de f correspondem aos zeros de $h(x) = f(x) - x$. Temos $h(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$ e $h(-1) = f(-1) - (-1) = 1 > 0$. Como h é contínua, do Teorema de Bolzano, terá pelo menos um zero, i.e., existe $c \in]-1, 1[$ tal que $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

4. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta\,,$$

   com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha, \beta[$.

   RESOLUÇÃO

   Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Vemos que f assume valores arbitrariamente próximos de α e de β e o resultado sai por continuidade.

Dado $\varepsilon > 0$, com $\varepsilon < (\beta - \alpha)/2$, podemos tomar a, b tais que

$$\alpha - \epsilon < f(a) < \alpha + \epsilon < \beta - \epsilon < f(b) < \beta + \epsilon$$

(da definição de limite, existe $R > 0$ tal que podemos tomar quaisquer $a < -R$ e $b > R$) . Aplicamos o teorema do Valor Intermédio no intervalo $[a, b]$ e temos que $[f(a), f(b)] \subset CD_f$. Em particular, $]\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon[\subset CD_f$, para qualquer $\epsilon > 0$, logo $]\alpha, \beta[\subset CD_f$.

5. Seja f uma função contínua num intervalo I.

   (a) Justifique que se $f(x_0) > f(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_2)$ então existe $c \in [a, b]$, $c \neq x_0$ e $f(c) = f(x_0)$.

   (b) Mostre que se f é injectiva em I então é estritamente monótona em I.

   (c) Considere $g(x) = -e^x$, para $x \leq 0$, $g(x) = e^x$ para $x > 0$. Justifique que g é injectiva em $\mathbb{R}$ e não monótona. Indique um intervalo onde g seja monótona.

   RESOLUÇÃO

   (a) Tomando a função $g(x) = f(x) - f(x_0)$, tem-se g contínua em I e $g(x_1) < 0$, $g(x_2) > 0$, logo existe $c \in I$ tal que $g(c) = 0$, pelo Teorema do Valor Intermédio.

   (b) Considere-se $x_0, x_1, x_2 \in I$ quaisquer, com $x_0 < x_1 < x_2$. Como f é injectiva, $f(x_0) \neq f(x_1) \neq f(x_2)$. Se for $f(x_0) < f(x_1)$ e $f(x_0) > f(x_2)$ pela alínea anterior teríamos $f(c) = f(x_0)$ o que é impossível, dado que f é injectiva. Concluimos que $f(x_0) < f(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_2)$ e f é estritamente crescente ou $f(x_0) > f(x_1)$ e $f(x_0) > f(x_2)$ e f é estritamente decrescente.

   (c) g é monótona em $] - \infty, 0]$.

6. a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função $\varphi(x) = g(1-x^2)$ tem máximo e mínimo.

   b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existência de máximo e mínimo? Justifique.

   RESOLUÇÃO

   a) A função φ é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in [0, +\infty[\}$, uma vez que é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios. Temos

   $$1 - x^2 \in [0, +\infty[\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1],$$

   ou seja, $D = [-1, 1]$. Como D é um intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass garante que φ tem máximo e mínimo em D.

b) Não. Neste caso, o domínio de φ seria $]-1,1[$. Tomando uma função g ilimitada numa vizinhança de 0, teríamos que φ seria ilimitada em vizinhanças de -1 e 1. Por exemplo, se $g(x) = \ln(x)$, então $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to -1^+} \varphi(x) = -\infty$.

7. Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.$$

Mostre que f tem mínimo e que o contradomínio de f é da forma $[f(c), +\infty[$, para algum $c \in]-1,1[$.

RESOLUÇÃO

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, fixo $R > 0$, existem $a, b \in]-1,1[$ tais que se $-1 < x < a$ ou se $b < x < 1$, então $f(x) > R$. Neste caso $f(a) \geq R$ e $f(b) \geq R$, porque f é contínua em a, b. Do Teorema de Weierstrass, sendo contínua, a função terá mínimo em $[a,b]$, i.e., existe c tal que $f(x) \geq f(c)$, $x \in [a,b]$. Mas se $x \in]-1,a[\cup]b,1[$, então $f(x) > R \geq f(a) \geq f(c)$, logo $f(c)$ é mínimo em $]-1,1[$. O contradomínio sai do Teorema de Bolzano / Valor Intermédio.

8. Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

a) Prove que f é limitada.

b) Mostre que f tem um ponto fixo, ou seja, que existe $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$

RESOLUÇÃO

a) Como existe (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, temos que f é limitada numa vizinhança de $+\infty$, ou seja num intervalo $[b, +\infty[$, para algum $b \in \mathbb{R}$. Da mesma forma, f será limitada num intervalo $]-\infty, a]$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, por ser contínua, o Teorema de Weierstrass garante que f é limitada em $[a,b]$. Logo é limitada em $\mathbb{R}$.

b) Considerando a função $h(x) = f(x) - x$, temos $\lim x \to \pm\infty h(x) = \lim x \to \pm\infty - x = \mp\infty$. Como h é contínua e o produto dos dois limites é negativo ($h(x) > 0$ para $x < x_0$ e $h(x) < 0$, para $x > x_1$), o Teorema do Valor Intermédio/ de Bolzano garante que existe c tal que $h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

c) Para $g(x) = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$, temos $g(x) \leq 1$ e $g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Agora, se o produto dos dois limites indicados é negativo, ou seja, se os limites indicados têm sinais diferentes, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, logo como f é contínua, o Teorema do Valor Intermédio garante que existe c tal que $f(c) = 0$. Temos neste caso $g(c) = 1 = \max g$.

3 Cálculo Diferencial

3.1 Diferenciabilidade

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

   a) $x|x|$, b) $e^{-|x|}$, c) $\ln|x|$, d) $e^{x-|x|}$.

   RESOLUÇÃO

a) $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser o produto de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Em $x = 0$, temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0)$, a função é também diferenciável para $x = 0$, ou seja é diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada $f'(x) = 2x$, se $x > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = -2x$, se $x < 0$.

b) $f(x) = e^{-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser dada pela composição da função exponencial que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$, que é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Em $x = 0$, tem-se $f'_e(0) = 1$ e $f'_d(0) = -1$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

c) $f(x) = \ln|x|$ é diferenciável no seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por ser dada pela composição de ln, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}^+$ e $|x|$ que é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) $f(x) = e^{x-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (como em b)). Em $x = 0$, $f'_d(0) = 0$, $f'_e(0) = 2$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

2. Calcule as constantes a e b por forma a que seja diferenciável em 0 a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Justifique a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}$, calcule a sua derivada, e determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em cada ponto $a \leq 0$.

RESOLUÇÃO

Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0) = a$ e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + \frac{2}{x} \operatorname{sen}^2(x) = 1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} 2x = 1 + 2 \cdot 0 = 1,$$

resulta que f é contínua em 0 sse $a = 1$.

Quanto à diferenciabilidade,

$$f_e'(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{bx}{x} = b$$

e

$$f_d'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \frac{2}{x} \operatorname{sen}^2(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = 2.$$

Logo f é diferenciável em 0 sse $b = 2$ (e $a = 1$).

Neste caso, $f'(0) = 2$ e a tangente ao gráfico em $(0, f(0))$ é dada por $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + 2x$.

Se $a < 0$, então (numa vizinhança de a) f é dada pela função polinomial (linear) $1 + 2x$, logo f é diferenciável em $]-\infty, 0[$ e $f'(a) = 2$ para $a < 0$, vindo a tangente ao gráfico em $(a, f(a))$ dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + 2a + 2(x - a) = 1 + 2x$ (ou seja, é a própria recta).

Se $a > 0$, então (numa vizinhança de a) f é dada pela função $1 + \frac{2}{x} \operatorname{sen}^2(x)$ que é diferenciável em a, já que é dada por soma e produtos de funções diferenciáveis. Logo, f é diferenciável em $]0, +\infty[$ e para $a > 0$, $f'(a) = -\frac{2}{a^2} \operatorname{sen}^2 a + \frac{2}{a} 2 \operatorname{sen} a \cos a = \frac{2 \operatorname{sen} a}{a} \left(-\frac{\operatorname{sen} a}{a} + 2 \cos a \right)$.

3. Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0.$$

RESOLUÇÃO

Para calcularmos as derivadas laterais, é necessário determinar primeiro $f(0)$. Como f é contínua em 0, $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$. Temos

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

logo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

e portanto $f(0) = 0$.

(Também podíamos calcular:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 0\cdot\frac{1}{1} = 0.)$$

Agora,

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 1,$$

$$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

(Nota: f é contínua mas não diferenciável em 0.)

4. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)$$

RESOLUÇÃO

Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e sen também:

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x + \cos(f(x))f'(x).$$

Logo, dado que $f(0) = f(\pi) = 0$, temos $g'(0) = f'(\operatorname{sen} 0)\cos 0 + \cos(f(0))f'(0) = f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$ e $g'(\pi) = f'(\operatorname{sen}\pi)\cos\pi + \cos(f(\pi))f'(\pi) = -f'(0) + f'(\pi)$. Então,

$$g'(0) + g'(\pi) = 2f'(0) - f'(0) + f'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)\,.$$

5. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\ln x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

RESOLUÇÃO

Do teorema de derivação da função composta, para $x \in]0,+\infty[$,

$$\varphi'(x) = e^{g(\ln x)}\,(g(\ln x))' = e^{g(\ln x)}g'(\ln x)\frac{1}{x}.$$

Logo,

$$\varphi'(1) = e^{g(0)} g'(0).$$

Derivando φ', temos

$$\varphi''(x) = e^{g(\ln x)} \frac{1}{x^2} \left((g'(\ln x))^2 - g'(\ln x) + g''(\ln x) \right).$$

Logo,

$$\varphi''(e) = e^{g(1)-2} \left((g'(1))^2 - g'(1) + g''(1) \right).$$

6. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

RESOLUÇÃO

Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f, g são diferenciáveis em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) f'(x) \\ &= g'(x^4 e^{-x})(4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x}) \\ &= g'(x^4 e^{-x}) x^3 e^{-x} (4 - x).\end{aligned}$$

7. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja g a função definida por

$$g(x) = \operatorname{arcos}(f(x)).$$

a) Justifique que g é injectiva e, sendo g^{-1} a função inversa de g, determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não é limitada.

RESOLUÇÃO

a) Uma vez que arcos é diferenciável em $]-1, 1[$ e f é diferenciável em $\mathbb{R}$ com contradomínio $]-1, 1[$, a função composta será também diferenciável em $\mathbb{R}$. Por outro lado, f é bijectiva, logo injectiva, e arcos é também injectiva. Conclui-se que a composta será uma função injectiva.

Temos

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}.$$

Logo $g'(2) = -\frac{f'(2)}{\sqrt{1-f(2)^2}} = -2.$

Do Teorema de derivação da função inversa, temos agora que

$$(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

Como $g(2) = \arcos(f(2)) = \arcos(0) = \frac{\pi}{2}$, temos $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, ou seja $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2}$.

b) O domínio de g^{-1} é dado pelo contradomínio de g. Como f é sobrejectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ e

$$D_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \arcos(]-1,1[) =]0,\pi[.$$

Uma vez que g^{-1} é injectiva e contínua, será monótona, e portanto

$$g^{-1}(0^+) < g^{-1}(x) < g^{-1}(\pi^-)$$

e g^{-1} não terá máximo nem mínimo. Aliás, o contradomínio de g^{-1} é o domínio de g, ou seja, $\mathbb{R}$, e assim g^{-1} não é limitada.

3.2 T. Rolle, Lagrange e Cauchy

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre que a equação $x^5 + 5x = 5$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.

   RESOLUÇÃO

Seja $f(x) = x^5+5x-5$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = 5(x^4+1) > 0$, em $\mathbb{R}$, logo f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e existirá no máximo uma solução da equação acima (ou Teorema de Rolle: se f tivesse dois zeros, então f' teria pelo menos um, como não é esse o caso, f tem no máximo um zero).

Por outro lado, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, logo como f é contínua, conclui-se do Teorema do Valor Intermédio / Bolzano, que f tem pelo menos um zero (aliás $CD_f = \mathbb{R}$).

2. Mostre que a equação $3x^2 = e^x$ tem exactamente três soluções em $\mathbb{R}$.

   RESOLUÇÃO

Seja $f(x) = 3x^2 - e^x$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

- f tem pelo menos 3 zeros: Teo. Valor Intermédio (Bolzano) Uma vez que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -1$$

  conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que f tem um zero em $]-\infty,0[$. Por outro lado,

$$f(1) = 3 - e > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

  logo, de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, f tem um zero em $]0,1[$ e também terá um zero em $]1,+\infty[$. Conclui-se que f tem pelo menos 3 zeros.

- f tem no máximo 3 zeros: Teo. Rolle

  Para vermos que não pode ter mais do que 3 zeros, calculamos as suas derivadas:

$$f'(x) = 6x - e^x, \quad f''(x) = 6 - e^x.$$

  Como e^x é injectiva, f'' tem um único zero. Logo, do Teorema de Rolle, f terá no máximo três zeros.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$, mas a derivada de f não se anula em $[-1,1]$. Justique que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

   RESOLUÇÃO

É claro que $f(-1) = f(1) = 0$ e que para $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} \neq 0$. Não contraria o Teorema de Rolle dado que f não é diferenciável em todos os pontos de $]-1,1[$ (não é diferenciável em 0).

4. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

RESOLUÇÃO

Note-se primeiro que o gráfico de f cruza a recta $y = x$ em três pontos sse a equação $f(x) = x$ tem três soluções. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Então, g tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle aplicado a g e a g', g' tem pelo menos dois zeros e g'' tem pelo menos um zero. Mas

$$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g''(x) = f''(x).$$

Logo f'' tem pelo menos um zero.

5. Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a restrição da função f ao intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ tem necessariamente um máximo.

b) A função f é necessariamente limitada.

c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

RESOLUÇÃO

a) Verdadeira, uma vez que f sendo diferenciável em $]0,1[$ será também contínua em qualquer intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, para $n \geq 2$. Logo, pelo Teorema de Weierstrass tem máximo e mínimo no intervalo fechado $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

b) Falsa: por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ verifica $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ e f não é limitada (justifique!).

c) Verdadeira: para $n \geq 2$, f é contínua em $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e diferenciável em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, com $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Logo, do Teorema de Rolle, f' tem um zero em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

6. Use o Teorema de Lagrange num intervalo adequado para provar a seguinte relação:

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1, \quad \text{para } x > 1.$$

RESOLUÇÃO

Aplicando o Teorema Lagrange a $\ln x$ em $[1, x]$, temos $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{1}{c_x}$, $\quad 1 < c_x < x$. De $1 < c_x < x$ vem que $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{c_x} < 1$, logo (uma vez que $x - 1 > 0$),

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1.$$

7. Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

RESOLUÇÃO

Se $f(n) = (-1)^n$, então $f(n+1) - f(n) = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}$. Agora, como f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $[n, n+1]$ e diferenciável em $]n, n+1[$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Lagrange temos então que existe $c_n \in]n, n+1[$ tal que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) \Leftrightarrow f'(c_n) = 2(-1)^{n+1}$$

e concluimos que $f'(c_n)$ é uma sucessão divergente (tem dois sublimites, -2 e 2). Como $n < c_n < n+1$, temos que $c_n \to +\infty$, logo f' não tem limite no infinito (se tivesse, $f'(c_n)$ seria convergente).

8. a) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$ então $L = 0$.

   b) Seja $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que h tem uma assíntota à direita em $y = mx + b$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = L$ então $L = m$.

RESOLUÇÃO

a) Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[x, x+1]$, temos $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$, em que $x < c_x < x+1$. Fazendo $x \to +\infty$, temos $c_x \to +\infty$, logo dado que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = b - b = 0.$$

b) Aplicar a) à função $f(x) = h(x) - mx$.

9. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.
(Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

   RESOLUÇÃO

   A função g será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto será crescente em $\mathbb{R}^+$ se $g'(x) \geq 0$ para $x > 0$. Temos, para $x > 0$,
$$g'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; xf'(x) \geq f(x) \;\Leftrightarrow\; f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}.$$
   Para provar esta desigualdade, aplicamos o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[0, x]$. Temos que, como $f(0) = 0$,
$$\frac{f(x)}{x} = f'(c)$$
   para algum $c \in]0, x[$. Como f' é crescente, $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$.

10. Supondo que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 em $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), [1] mostre que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que
$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \qquad \text{para quaisquer } x, y \in [a, b].$$

    RESOLUÇÃO

    Sejam $x, y \in [a, b]$, com $x < y$, por ex. Aplicando o teorema de Lagrange no intervalo $[x, y]$, temos $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$, para algum $c \in]x, y[$. Como f' é contínua em $]a, b[$ e tem limites laterais em a e b, é limitada em $[a, b]$, logo
$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \leq C \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

11. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,
    c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$,
    e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}$,
    b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x + e^x)}{x}$,
    d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4}$,
    f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(\ln x \cdot \ln\ln x)$,

[1] Diz-se que f é de classe C^1 em $[a, b]$ sse f é contínua em $[a, b]$, f' é contínua em $]a, b[$ e existem $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$ (i.e., f' é prolongável por continuidade a $[a, b]$).

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$,

l) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2}$,

m) $\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right)$,

n) $\lim_{x\to +\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right)$,

o) $\lim_{x\to +\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$,

p) $\lim_{x\to 0^+} \ln x \operatorname{sen} \sqrt{x}$,

NOTA: Nas resoluções seguintes, quando escrevemos a igualdade

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{RC}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

estamos a assumir como verificado que o limite à direita existe em $\overline{\mathbb{R}}$ (mesmo que não seja explicitamente referido). Se $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, então a Regra de Cauchy não é aplicável.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra de Cauchy (uma vez que se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \ln a \cdot a^x - \ln b \cdot b^x = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de Cauchy (duas vezes - uma vez que temos de novo uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1+e^x}{x+e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1.$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$, é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usando a Regra de Cauchy (uma vez que se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1.$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y = x^2$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(y)}{y^2} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+y^2}}{2y} = +\infty.$$

e) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y = 1/x$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}} = \lim_{y\to0} \frac{\operatorname{arctg} y}{\operatorname{sen} y} \overset{RC}{=} \lim_{y\to0} \frac{\frac{1}{1+y^2}}{\cos y} = 1.$$

f) $\lim_{x\to1}(\ln x \cdot \ln\ln x)$ é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo

$$\lim_{x\to1} \ln x \cdot \ln\ln x = \lim_{x\to1} \frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to1} -\ln x = 0.$$

g) $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Escrevendo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}},$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

(Nota: a Regra de Cauchy aplicada directamente a $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ não simplifica a questão. . .)

h) $\lim_{x\to0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}e^{-1/x} = -\infty\cdot+\infty = -\infty.$
(Note que a Regra de Cauchy *não* é aplicável!)

i) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 1\cdot0 = 0.$
(Note que não existe $\lim_{x\to0^+} \frac{(x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x})'}{(\operatorname{sen} x)'}$ logo a Regra de Cauchy não é aplicável.)

j) $\lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de Cauchy (três vezes - uma vez que obtemos indeterminações $\frac{0}{0}$ e o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3} \overset{RC}{=} \dots \overset{RC}{=} \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{6} = \frac{1}{3}.$$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (duas vezes - uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^2}\overset{RC}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2\cdot 2^x}{2x}\overset{RC}{==}lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln 2)^2\cdot 2^x}{2}=+\infty.$$

l) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}2^x=0\cdot 0=0.$

m) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2\left(1-\cos\dfrac{1}{1-x}\right)=0$, por enquadramento, já que $(x-1)^2\to 0$, e $0<1-\cos\frac{1}{1-x}<2$, logo

$$0<(x-1)^2\left(1-\cos\frac{1}{1-x}\right)<2(x-1)^2.$$

(A Regra de Cauchy *não* é aplicável.)

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2\left(1-\cos\dfrac{1}{1-x}\right)$, é uma indeterminação do tipo $\infty\cdot 0$. Temos, fazendo $y=\dfrac{1}{1-x}$,

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2\left(1-\cos\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}\overset{RC}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{2y}=\frac{1}{2}.$$

o) $\lim_{x\to+\infty}\ln x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\infty\cdot 0$. Temos, fazendo $y=\dfrac{1}{x}$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\lim_{y\to 0^+}-\ln y\operatorname{sen} y=\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln y}{-\frac{1}{\operatorname{sen} y}}$$
$$\overset{RC}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{y}}{\frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 y}{y\cos y}=0$$

já que $\lim_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}=1$ (ou RC mais uma vez).

12. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+}x^{\ln\ln x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x-1}}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

RESOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x}$ é uma indeterminação do tipo 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln\left(x^{\ln\ln x}\right)} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln\ln x \ln x} = e^{\lim_{x\to 1^+} \ln\ln x \ln x}.$$

Vimos no exercício anterior 11.f), $\lim_{x\to 1^+} \ln(\ln x)\ln(x) = 0$ logo

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x} = e^0 = 1.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}\ln x} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\ln x}.$$

Agora, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1.$$

(c) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x}.$$

Temos que $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0.$$

Logo

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

(d) $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln x}.$$

Agora $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$$

logo $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

(e) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

já que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = e^{-1}$$

já que, fazendo $y = 1/x$, e pela Regra de Cauchy (já que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen} y)}{-\ln y} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}}{-\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{-y\cos y}{\operatorname{sen} y} = -1.$$

13. Calcule $\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$).

RESOLUÇÃO

14. $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos que

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\ln x}.$$

Vamos calcular $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\ln x$, que é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo $\operatorname{sen} x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e podemos usar a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &\overset{RC}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

Pela definição de limite, como $\frac{1}{n} \to 0$, temos agora

$$\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen} \frac{1}{n}} = 1.$$

15. Prove por indução matemática que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, se tem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0.$$

RESOLUÇÃO

Para $p = 1$, aplicando a Regra de Cauchy, temos $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Assumindo por hipótese de indução que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0$ para um dado $p \in \mathbb{N}$, usamos de novo a Regra de Cauchy para calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)x^p}{e^x} = (p+1) \cdot 0 = 0.$$

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

3.3 Estudo de funções

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.

c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

d) Estude f quanto a monotonia e extremos.

e) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e determine o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO

a) f é diferenciável no ponto 1 uma vez que é dada, numa vizinhança de 1, pela função $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ que é diferenciável no seu domínio (por ser a composta de uma função trigonométrica inversa com uma função racional). Temos

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 + 1},$$

logo $f'(1) = -\frac{1}{2}$. A tangente ao gráfico no ponto 1 é a recta

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}.$$

b) Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0) = a$ e

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

resulta que f é contínua em 0 se e só se $a = \frac{\pi}{2}$.
Quanto à diferenciabilidade,

$$f_e'(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-} \frac{bx}{x} = b$$

e

$$f_d'(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x}.$$

Como se trata de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, tentemos usar a regra de Cauchy. Assim, como

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2})'}{(x)'} = \lim_{x\to0^+} = -\frac{1}{x^2 + 1} = -1,$$

deduz-se que $f_d'(0) = -1$ e que f é diferenciável em 0 sse $a = \frac{\pi}{2}$ e $b = -1$.

c) Se $a < 0$, então numa vizinhança de a f é dada pela função polinomial $\frac{\pi}{2} - x$, que é diferenciável. Logo f é diferenciável em $]-\infty, 0[$.

Se $a > 0$, então numa vizinhança de a, f é dada pela função $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Concluimos que f é diferenciável em a se $a > 0$ e, portanto, f é diferenciável em $]0, +\infty[$.

Como para $a < 0$, $f'(a) = b = -1$, temos

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para ver se f é de classe C^1, ou seja, se f' é contínua: temos que f' é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (justifique). No ponto 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x^2+1} = -1 = f'(0).$$

Logo f' é contínua em 0 e portanto é de classe C^1.

d) f é decrescente em $\mathbb{R}$, já que $f'(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}$, não tem extremos.

e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \operatorname{arctg}(0) = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\pi}{2} - x = +\infty$. O contradomínio é $\mathbb{R}^+$ (justifique).

2. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$.
b) Determine $\lim_{x \to -\infty} g(x)$, $\quad \lim_{x \to +\infty} g(x)$.
c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.
d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.
e) Determine o contradomínio de g.

RESOLUÇÃO

a) Se g tem derivada finita em 0, será contínua em 0, logo $g(0) = g(0^+) = g(0^-)$, ou seja,

$$g(0) = 1 + \beta = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

logo $\beta = \frac{\pi}{4} - 1$. Por outro lado, g é diferenciável em 0 logo $g'_e(0) = g'_d(0)$ e temos

$$g'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + \alpha x + \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} + \alpha = \alpha + 1,$$

$$g'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy na indeterminação $\frac{0}{0}$) logo $\alpha = -1$.

b)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - x + \frac{\pi}{4} - 1 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

c) g é diferenciável em $\mathbb{R}$ (justifique) e

$$g'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x \le 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{1+(e^x+e^{-x}-1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

d) Temos para $x \le 0$: $g'(x) = e^x - 1 < 0$ para qualquer $x < 0$ e $g'(0) = 0$. Logo g é decrescente em $]-\infty, 0]$.
Para $x > 0$: $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1+(e^x+e^{-x}-1)^2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Logo g é crescente em $]0, +\infty[$. Conclui-se que 0 é um ponto de mínimo absoluto, usando a continuidade de g em 0.

e) Da alínea anterior temos que $g(0) = \frac{\pi}{4}$ é um mínimo absoluto, logo $g(x) \ge \frac{\pi}{4}$ para qualquer x e $CD_g = g(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$. Por outro lado, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ e g é contínua em $]-\infty, 0]$. Conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[\subset g(\mathbb{R})$.
Logo o contradomínio de g é $CD_g = \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.
c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^{-\frac{x^2}{2}})$ é uma indeterminação do tipo $(-\infty)\cdot 0$. Escrevendo $-xe^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$, a que podemos tentar aplicar a Regra de Cauchy. Como,

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = 0,$$

podemos concluir que,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0.$$

Como a função é par, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) A função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis, sendo portanto diferenciável. Para $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1,$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to0^+} -e^{-\frac{x^2}{2}} = -1.$$

Logo, $f'_d(0) \neq f'_e(0)$ e f não é diferenciável em 0. Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e neste caso

$$f'(x) = \begin{cases} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2), & \text{se } x > 0, \\ \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Usamos a alínea anterior.
Para $x > 0$:

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \\ &f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \end{aligned}$$

logo f é crescente em $[0,1]$ e decrescente em $[1,+\infty[$.
Para $x < 0$:

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \ \vee \ x > 1) \ \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow x < -1 \\ &f'(-1) = 0 \end{aligned}$$

logo f é crescente em $]-\infty,-1]$ e decrescente em $[-1,0]$.
Conclui-se que 1 e -1 são pontos de máximo, absolutos uma vez que $f(-1) = f(1)$. Como f é decrescente em $[-1,0]$ e crescente em $[0,1]$, temos também que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, para $x \neq 0$.

d) Temos da alínea anterior que f tem um máximo absoluto em 1, com $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ e um mínimo absoluto em 0 com $f(0) = 0$, logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, e^{-\frac{1}{2}}]$. Como f é contínua em $[0,1]$, temos também, do Teorema do Valor Intermédio, que $[0, e^{-\frac{1}{2}}] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.
   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
   d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

   RESOLUÇÃO:

   a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-xe^{x-1})$ é uma indeterminação do tipo $(-\infty)\cdot 0$. Escrevendo $-xe^{x-1} = \frac{-x}{e^{1-x}}$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$ à qual podemos tentar aplicar a Regra de Cauchy. Como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)'}{(e^{1-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0,$$

   podemos concluir que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = 0.$$

   Da mesma forma,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0,$$

   em que a penúltima igualdade é justificada a posteriori pela existência do último limite (relembre as condições de aplicação da regra de Cauchy).

   b) A função é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ por ser dada nesse conjunto pelo produto de duas funções diferenciáveis: $|x|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $e^{-|x-1|}$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (por ser a composta de duas funções: exponencial diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x-1|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). Em $x = 1$:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{xe^{-x+1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} e^{-x+1}(1-x) = 0$$

   (onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$, tendo em conta a existência do último limite) e da mesma forma,

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{xe^{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^-} e^{x-1}(1+x) = 2.$$

   Logo, $f'_d(1) = 0 \neq f'_e(1) = 2$ e f não é diferenciável em 1.

   No ponto 0, pode ver-se (justifique) que $f'_d(0) = e^{-1} \neq f'_e(0) = -e^{-1}$, logo f não é diferenciável em 0, e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} (xe^{-x+1})' = e^{-x+1}(1-x), & \text{se } x > 1, \\ (xe^{x-1})' = e^{x-1}(1+x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ (-xe^{x-1})' = -e^{x-1}(1+x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Temos (justifique): $f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, estudando o sinal de f' e usando a continuidade de f,

- f crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[0, 1]$,
- f decrescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$.

Logo, -1 é ponto de máximo, 0 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Como $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ para $x \neq 0$, 0 é mínimo absoluto. Por outro lado, $f(1) = 1$ e $f(-1) = e^{-2} < 1$, logo 1 é ponto de máximo absoluto, e consequentemente, -1 é ponto de máximo relativo.

d) Da alínea anterior, temos que $0 = f(0)$ é mínimo absoluto de f e $1 = f(1)$ é máximo absoluto de f. Logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$. Como f é contínua em $[0, 1]$, do Teorema do Valor Intermédio, $[0, 1] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $CD_f = f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

5. Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se
$$\varphi(x) = 2\operatorname{tg}(g(x)) - g(x).$$
Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

RESOLUÇÃO:

Do teorema de derivação da função composta,

$$\begin{aligned}(\varphi(x))' &= (2\operatorname{tg}(g(x)) - g(x))' \\ &= (2 + 2\operatorname{tg}^2(g(x)))g'(x) - g'(x) \\ &= g'(x)(2\operatorname{tg}^2(g(x)) + 1).\end{aligned}$$

Logo $\varphi'(0) = 0$. Como $g'(0) = 0$ e g' é estritamente monótona, temos que g' muda de sinal numa vizinhança de 0 (se g' é crescente, $g'(x) < g'(0) = 0$, para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$) e portanto, como $2\operatorname{tg}^2(g(x)) + 1 > 0$ para qualquer x, φ' também muda de sinal numa vizinhança de 0. Como φ é contínua em 0 - já que g é contínua por ser diferenciável, e tg é contínua em $g(0) = 0$ - conclui-se que $\varphi(0)$ é extremo de φ (mínimo, se g' for crescente).

6. Determine os extremos da função $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$, classificando-os, e determine os seus pontos de inflexão. Esboce o gráfico da função.

RESOLUÇÃO

Temos
$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}, \qquad f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^4}\right)' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

Sendo 0 o único ponto crítico de f, ou seja solução de $f'(x) = 0$, e como $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ temos que f é crescente em $]0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$, logo 0 é ponto de mínimo (ou a segunda derivada $f''(0) = 1 > 0$)

Atendendo a que $f(0) = 0$ e f é não negativa, 0 é um mínimo absoluto.

Os pontos de inflexão de f são as soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, uma vez que f'' muda de sinal nestes pontos.

7. Faça um estudo tão completo quanto possível da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função.

   RESOLUÇÃO:

Dado que $f \in C^2(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (x^4 e^{-x})' = x^3\, e^{-x}\,(4 - x)\,, \qquad f''(x) = x^2\, e^{-x}\,(12 - 8x + x^2)\,,$$

- Monotonia e extremos:
  Os pontos críticos de f, i.e. as solução de $f'(x) = 0$, são 0 e 4. Temos

  $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 4[,$$

  (justifique) logo a função é estritamente crescente no intervalo $]0, 4[$ e estritamente decrescente nos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]4, +\infty[$. Conclui-se que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) \geq 0$, $\forall x$, ou vendo que

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0,$$

  e 4 é um ponto de máximo, relativo uma vez que

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4\, e^{-x} = +\infty.$$

- Concavidade e inflexões:
  Temos

  $$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x = 2 \vee x > 6.$$

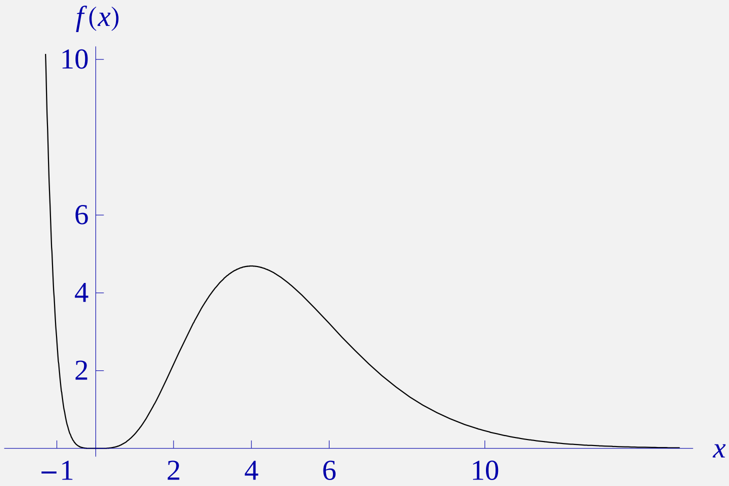
  Logo f tem concavidade para cima em $]-\infty, 2[$ e em $]6, +\infty[$, e virada para baixo em $]2, 6[$ (notem que $f''(0) = 0$ mas 0 não é ponto de inflexão dado que f'' não muda de sinal em 0).

- Assíntotas:
  Uma vez que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ é assíntota horizontal à direita. Não há assíntota oblíqua à esquerda já que

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^3\, e^{-x} = +\infty.$$

  (Não há assíntotas verticais, já que f é contínua em $\mathbb{R}$.)

O gráfico de f pode agora ser esboçado:



4 CÁLCULO INTEGRAL

4.1 Primitivação

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $x \cos x$,
b) $x \ln x$,
c) $x^2 \operatorname{sen} x$,
d) $\ln(1+x)$,
e) $\cos^2 x$,
f) $\operatorname{sen}^3 x$,
g) $\operatorname{arcsen} x$,
h) $x \operatorname{arctg} x$,
i) $\ln^3 x$,
j) $\operatorname{sen} x \ln(1 + \operatorname{sen} x)$,
k) $\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$,
l) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
m) $\dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$.

RESOLUÇÃO

a) Com $u' = \cos x \Rightarrow u = \operatorname{sen} x$ e $v = x \Rightarrow v' = 1$, temos

$$P(x \cos x) = x \operatorname{sen} x - P(\operatorname{sen} x) = x \operatorname{sen} x + \cos x.$$

b) Com $u' = x \Rightarrow u = x^2/2$ e $v = \ln x \Rightarrow v' = 1/x$, temos

$$P(x \ln x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - P\left(\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

c) Com $u' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u = -\cos x$ e $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$, temos (usando a))

$$P\left(x^2 \operatorname{sen} x\right) = -x^2 \cos x + P(2x \cos x) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x.$$

d) Com $u' = 1 \Rightarrow u = x$ e $v = \ln(1+x) \Rightarrow v' = \frac{1}{1+x}$, temos

$$P(\ln(1+x)) = x\ln(1+x) - P\left(\frac{x}{1+x}\right) = x\ln(1+x) - P\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = (x+1)\ln(1+x) - x.$$

(Também podíamos ter tomado $u = x + 1$.)

e) Com $u' = \cos x \Rightarrow u = \operatorname{sen} x$ e $v = \cos x \Rightarrow v' = -\operatorname{sen} x$, temos

$$\begin{aligned} P\left(\cos^2 x\right) &= \operatorname{sen} x \cos x + P\left(\operatorname{sen}^2 x\right) = \operatorname{sen} x \cos x + P\left(1 - \cos^2 x\right) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x + x - P\left(\cos^2 x\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$2P\left(\cos^2 x\right) = \operatorname{sen} x \cos x + x \;\Leftrightarrow\; P\left(\cos^2 x\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x \cos x + x).$$

f) Com $u' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u = -\cos x$ e $v = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow v' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, temos

$$P\left(\operatorname{sen}^3 x\right) = -\cos x \operatorname{sen}^2 x + P\left(2 \operatorname{sen} x \cos^2 x\right) = -\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x.$$

g) $P(\operatorname{arcsen} x) = x \operatorname{arcsen} x - P\left(x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}$,

h) $P(x \operatorname{arctg} x) = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - P\left(\dfrac{x^2}{2}\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

$= \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}P\left(1 - \dfrac{1}{1+x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x\right)$,

i) Primitivando por partes 3 vezes, fazendo sempre $u' = 1$, com $v = \ln^3$ (e depois $v = \ln^2$, e $v = \ln x$):

$$\begin{aligned} P(\ln^3 x) &= x \ln^3 x - P(3\ln^2 x) \;=\; x(\ln^3 x - 3\ln^2 x) + P(6 \ln x) \\ &= x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6 \ln x) - P(6) \;=\; x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6). \end{aligned}$$

j) Fazendo $u' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u = -\cos x$ e $v = \ln(1 + \operatorname{sen} x) \Rightarrow v' = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$ temos

$$\begin{aligned} P\left(\operatorname{sen} x \ln(1 + \operatorname{sen} x)\right) &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + P\left(\frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}\right) \\ &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + P\left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}\right) \\ &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + P\left(1 - \operatorname{sen} x\right) \\ &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + x + \cos x. \end{aligned}$$

k) Com $u' = \sqrt{x} \Rightarrow u = \frac{2}{3}x^{3/2}$ e $v = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ temos

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\right) &= \frac{2}{3}x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - P\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\right) \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3}P\left(\frac{x}{1+x}\right) \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3}(x - \ln(1+x)) \end{aligned}$$

(note que $x > 0$ no domínio da função).

l) Com $u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-1/2} \Rightarrow u = \sqrt{1+x^2}$ e $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$, temos

$$P\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right) = x^2\sqrt{1+x^2} - P\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(OU fazendo primeiro a substituição $y = x^2$ temos

$$P\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right) = P\left(\frac{y}{2\sqrt{1+y}}\right)$$

e depois por partes.)

m) Com $u' = \frac{x^3}{(1-x^4)^2} \Rightarrow u = \frac{1}{4(1-x^4)}$ e $v = x^4$, temos

$$P\left(\frac{x^7}{(1-x^4)^2}\right) = P\left(x^4\frac{x^3}{(1-x^4)^2}\right) = x^4\frac{1}{4(1-x^4)} - P\left(4x^3\frac{1}{4(1-x^4)}\right)$$
$$= \frac{x^4}{4(1-x^4)} + \frac{1}{4}\ln(1-x^4).$$

(OU fazendo primeiro a substituição $y = x^4$.)

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utlizando uma decomposição em fracções simples adequada:

a) $\frac{1}{x^2+x}$, b) $\frac{x+1}{x(x-1)^2}$, c) $\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}$, d) $\frac{x+3}{x^4-x^2}$

RESOLUÇÃO:

a) $P\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = P\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)$. Usando a decomposição em fracções simples $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ temos

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$$

logo $A + B = 0$ e $A = 1$, ou seja, $A = 1$ e $B = -1$. Temos então

$$P\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = P\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

b) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}\\ &= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A - B + C)x + A}{x(x-1)^2}\end{aligned}$$

logo $A + B = 0$, $-2A - B + C = 1$, $A = 1$, ou seja, $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$. Temos então

$$P\left(\frac{x+1}{x(x-1)^2}\right) = P\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1}.$$

c) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}\\ &= \frac{Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+4)}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + 4A + Cx}{x(x^2+4)}\end{aligned}$$

logo $A + B = 1$, $C = 1$ e $4A = -4$, ou seja, $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$. Temos então

$$P\left(\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}\right) = P\left(-\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) = -\ln|x| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

d) $P\left(\frac{x+3}{x^4-x^2}\right) = P\left(\frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)}\right)$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Usando a decomposição em fracções simples

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

tem-se $A = -1$, $B = -3$, $C = 2$, $D = -1$ (verifique). Logo,

$$P\left(\frac{x+3}{x^4-x^2}\right) = -\ln|x| + \frac{3}{x} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| = \frac{3}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x(x+1)|}.$$

3. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$ c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

d) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$, e) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, f) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$,

g) $\dfrac{2\ln x-1}{x\ln x(\ln x-1)^2}$, h) $\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)^2}$, i) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$,

RESOLUÇAO:

a) Fazendo a substituição $\sqrt{x}=t \Leftrightarrow x=t^2$, com $x>0$, $x\neq 16$, e $t>0$, $t\neq 4$, temos

$$P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\right)=P\left(\frac{1+t}{t^2(4-t)}\,2t\right)=2P\left(\frac{1+t}{t(4-t)}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2+2t}{t(4-t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{4-t}$$

temos $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{2}$, logo

$$2P\left(\frac{1+t}{t(4-t)}\right)=\frac{1}{2}P\left(\frac{1}{t}+\frac{5}{4-t}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{(4-t)^5}\right|$$

e assim,

$$P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}\right|.$$

b) Fazendo a substituição $\sqrt[3]{x}=t \Leftrightarrow x=t^3$, temos (verifique)

$$P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}\right)=P\left(\frac{3t^2}{1+t^4}\right)=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2}.$$

c) Fazendo a substituição $\sqrt{x-1}=t \Leftrightarrow x=t^2+1$, com $x>1$ e $t>0$ temos (verifique)

$$P\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x}\right)=P\left(\frac{2t^2}{t^2+1}\right)=2\sqrt{x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$$

d) Fazendo a substituição $e^{2x}=t \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln t$, com $x\in\mathbb{R}$ e $t>0$, temos

$$P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right)=P\left(\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2t}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(1+t)2t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

temos $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, logo

$$P\left(\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2t}\right) = P\left(-\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2t}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|$$

e assim, com $t = e^{2x} > 0$,

$$P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right).$$

(Ou $P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right) = P\left(\frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = P\left(1-\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = x - \ln(1+e^{2x})$.)

e) Fazendo a substituição $e^{2x} = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln t$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, temos (verifique)

$$P\left(\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{t}{t+1}\right) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right).$$

f) Fazendo a substituição $e^{x} = t \Leftrightarrow x = \ln t$, com $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $t > 0$, $t \neq 1$, temos

$$P\left(\frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\right) = P\left(\frac{t^3}{(1+t^2)(t-1)^2}\,\frac{1}{t}\right) = P\left(\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$

temos $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = D = \frac{1}{2}$, logo

$$\begin{aligned} P\left(\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\right) &= \frac{1}{2}P\left(-\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} \end{aligned}$$

e assim

$$P\left(\frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\right) = -\frac{1}{4}\ln(1+e^{2x}) + \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{e^x-1}.$$

g) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, com $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, e\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, temos

$$P\left(\frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}\right) = P\left(\frac{2t-1}{e^t t(t-1)^2}\, e^t\right) = P\left(\frac{2t-1}{t(t-1)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2t-1}{t(t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}$$

temos $A = -1$, $B = C = 1$, logo

$$P\left(\frac{2t-1}{t(t-1)^2}\right) = P\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - \frac{1}{t-1}$$

e assim

$$P\left(\frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}\right) = \ln\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x}\right| - \frac{1}{\ln x - 1}.$$

h) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, com $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, temos

$$P\left(\frac{\ln x}{x(\ln x - 1)^2},\right) = P\left(\frac{t}{(t-1)^2},\right) = \ln|\ln x - 1| - \frac{1}{\ln x - 1}.$$

i) Fazendo a substituição $\operatorname{tg} x = t \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} t$, com $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $x \neq -\frac{\pi}{4}$ e $t \neq -1$, temos (verifique)

$$P\left(\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right) = P\left(\frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\right) = \ln|\cos x| + \ln|\operatorname{tg} x + 1|.$$

NOTA: Esta substituição é invertível para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, mas como a função $\operatorname{tg} x$ é periódica de período π, o resultado é válido no domínio de $\operatorname{tg} x$.

4. Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, $x > 16$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

RESOLUÇÃO

a) Temos $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c$, com $c \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8} + c$, logo $c = -\frac{\pi^2}{8}$.

b) Temos $f(x) = \frac{1}{2}\ln|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}| + c$, para $x > 16$ (Ex. 3.a)); $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, logo não existe f nas condições do enunciado.

c) Temos $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) + 1$ (ver 3.d))

5. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, $1 + x = t^4$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1 + e^x$

c) $\dfrac{1}{x(4-\ln^2(x))}$, $t = \ln x$

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x) + 3(\cos x - 1)}$, $t = \cos x$

e) $\dfrac{1}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}$, $t = \operatorname{sen}(x)$

f) $\sqrt{1-x^2}$, $x = \operatorname{sen} t$.

RESOLUÇÃO

a) Fazendo a substituição $\sqrt[4]{1+x} = t \Leftrightarrow x = t^4 - 1$, com $x > -1$ e $t > 0$, temos

$$P\left(\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\right) = P\left(\frac{1}{(t^4-1)t}\,4t^3\right) = P\left(\frac{4t^2}{t^4-1}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{4t^2}{t^4-1} = \frac{4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

temos $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$ (verifique). Logo,

$$P\left(\frac{4t^2}{t^4-1}\right) = P\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\operatorname{arctg} t$$

e assim,

$$P\left(\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\right) = \ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}+1}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x}.$$

b) Fazendo a substituição $t = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow x = \ln(t^2-1)$, para $x \in \mathbb{R}$, $t > 1$, temos

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right) = P\left(\frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2-1}\right) = P\left(\frac{2}{(t-1)(t+1)}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$$

temos $A = 1$ e $B = -1$. Logo

$$P\left(\frac{2}{(t-1)(t+1)}\right) = \ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

e assim

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right) = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|.$$

c) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, para $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-2}, e^2\}$, $t \neq \pm 2$, temos

$$P\left(\frac{1}{x(4-\ln^2(x))}\right) = P\left(\frac{1}{e^t(4-t^2)}\,e^t\right) = P\left(\frac{1}{(2-t)(2+t)}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(2-t)(2+t)} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2+t} = \frac{A(2+t)+B(2-t)}{(2-t)(2+t)}$$

temos $A = B = 1/4$. Logo

$$P\left(\frac{1}{(2-t)(2+t)}\right) = -\frac{1}{4}\ln|2-t| + \frac{1}{4}\ln|2+t| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|$$

e assim

$$P\left(\frac{1}{x(4-\ln^2(x))}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|.$$

d) Temos

$$P\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 3(\cos x - 1)}\right) = P\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x + 3(\cos x - 1)}\right) = P\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}\right)$$

Fazendo a substituição $t = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos t$, com $x \in]0, \pi[$, temos

$$P\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}\right) = P\left(\frac{1}{t^2-3t+2}\right) = P\left(\frac{1}{(t-1)(t-2)}\right) = P\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)$$

e assim

$$P\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x) + 3(\cos x - 1)}\right) = \ln\left|\frac{\cos x - 2}{\cos x - 1}\right|.$$

Fazendo a substituição $t = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} t$, com $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, temos

$$P\left(\frac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\right) = P\left(\frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)^2}\right) = P\left(\frac{1}{(1+t)(1-t)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{(1-t)^2}$$

temos $A = B = 1/4$, $C = 1/2$ (verifique). Logo

$$P\left(\frac{1}{(1+t)(1-t)^2}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2(1-t)}$$

e assim

$$P\left(\frac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{2(1-\operatorname{sen} x)}.$$

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

4.2 Integral: definição e propriedades

1. Considere a função f definida no intervalo $[0,2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[\\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$$

a) Mostre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma decomposição d_n do intervalo $[0,2]$ tal que as somas superior $S_{d_n}(f)$ e inferior $s_{d_n}(f)$ verificam

$$S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) < \frac{1}{n}, \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_{d_n}(f) = \lim_{n\to+\infty} s_{d_n}(f) = 4.$$

b) Justifique que f é integrável em $[0,2]$ e que $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

RESOLUÇÃO

a) Escolhemos uma decomposição de $[0,2]$ da forma $d = \{0, 1-\varepsilon, 1+\varepsilon, 2\}$. Como $\sup_{x\in[0,1-\varepsilon]} f(x) = \inf_{x\in[0,1-\varepsilon]} f(x) = 1$ e $\sup_{x\in[1+\varepsilon,2]} f(x) = \inf_{x\in[1+\varepsilon,2]} f(x) = 3$, $\sup_{x\in[1-\epsilon,1+\varepsilon]} f(x) = 3$, $\inf_{x\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]} f(x) = 1$, temos

$$S_d(f) = 1(1-\varepsilon-0) + 3(2-(1-\varepsilon)) = 4+2\varepsilon$$

$$s_d(f) = 1(1+\varepsilon-0) + 3(2-(1+\varepsilon)) = 4-2\varepsilon$$

Tomando para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/4(n+1)$ temos

$$S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) = 4\varepsilon = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

e também

$$\lim S_{d_n}(f) = \lim 4 + \frac{1}{2(n+1)} = 4, \quad \lim s_{d_n}(f) = \lim 4 - \frac{1}{2(n+1)} = 4.$$

b) Da alínea anterior $\lim S_{d_n}(f) - s_{d_n}(f) = 0$ logo f é integrável em $[0,2]$ e $\int_0^2 f(x)\,dx = \lim S_{d_n}(f) = 4$.

2. a) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, mostre recorrendo à definição, que f^2 é integrável. (Sugestão: Considere $f \geq 0$; o caso geral segue de $f^2 = |f|^2$).

b) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, justifique que fg é integrável. (Sugestão: $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.)

RESOLUÇÃO

a) Seja $f \geq 0$. Para cada decomposição $d = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, tem-se, escrevendo $M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$,

$$M_i(f^2) = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = M_i(f)^2,$$

$$m_i(f^2) = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = m_i(f)^2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} S_d(f^2) - s_d(f^2) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f^2) - m_i(f^2))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f)^2 - m_i(f)^2)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))(M_i(f) + m_i(f))(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq 2M\sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) = 2M(S_d(f) - s_d(f)), \end{aligned}$$

onde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dado $\varepsilon > 0$ aribtrário, como f é integrável, podemos escolher a decomposição d tal que $S_d(f) - s_d(f) < \frac{\varepsilon}{2M}$, e portanto tal que

$$S_d(f^2) - s_d(f^2) < \varepsilon.$$

Conclui-se que f^2 é integrável para $f \geq 0$ integrável.
Para f arbitrária, como f integrável $\Rightarrow |f|$ integrável e portanto, como vimos acima, $|f|^2 = f^2$ é integrável.

b) De $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, temos que fg é uma soma de funções integráveis, e portanto integrável.

3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{1}{k} & \text{se } x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Mostre que f é descontínua em qualquer ponto da forma $x = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

b) Mostre que f é monótona crescente. Justifique que f é integrável em $[0,1]$.[1]

RESOLUÇÃO

[1]NOTA: f é um exemplo de uma função integrável com um número infinito (numerável) de descontinuidades.

a) É imediato da definição que, para cada $k \in \mathbb{N}$ fixo, $k \geq 2$, $f(\frac{1}{k}^-) = \frac{1}{k}$ e $f(\frac{1}{k}^+) = \frac{1}{k-1}$. Logo, f não é contínua em $\frac{1}{k}$.

(Já agora: f é contínua em qualquer $x \neq \frac{1}{k}$, $k \geq 2$, à esquerda em 1 e à direita em 0 - mais difícil!)

b) Seja $x \in]0,1[$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Se $y > x$ então:

– se $y \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, então $f(x) = f(y) = \frac{1}{k}$.

– caso contrário, $y \in \left]\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right]$, com $l < k$, já que $y > x$. Logo $f(y) = \frac{1}{l} > \frac{1}{k} = f(x)$.

Em qualquer dos caso, $f(y) \geq f(x)$ e f é monótona crescente (não estritamente). É integrável já que qualquer função monótona (em $[a,b]$) é integrável (em $[a,b]$).

4. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que se é nulo o integral de f em *qualquer* intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO

Se, por contradição, fosse $f(a) > 0$ para algum a, como f é contínua, seria $f(x) > f(a)/2 > 0$ em $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, para algum $\varepsilon > 0$. Da monotonia do integral, $\int_{]a-\varepsilon,a+\varepsilon[} f(t)\,dt > \varepsilon f(a) > 0$, o que contradiz a hipótese. Da mesma forma, também não pode ser $f(a) < 0$. Logo, $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Alternativamente, tem-se por hipótese $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Derivando ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo, já que f é contínua), temos

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

É suficiente tomar $f(x) = 0$ excepto num conjunto finito, por exemplo $f(0) = 3$, $f(x) = 0$, $x \neq 0$ (também pode ser, por exemplo, $f(x) = 0$, $x \notin \mathbb{Z}$, $f(n) = n$, $n \in \mathbb{Z}$).

4.3 Teorema Fundamental do Cálculo

1. Calcule $\phi'(x)$ sendo $\phi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$.

Como $e^{\operatorname{sen} t}$ é uma função contínua, do Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$ é diferenciável, logo $\phi(x) = x^2 \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$ também será e

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \left(\int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt\right)' = \left(-x^2 \int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\, dt\right)' \\ &= 2x \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\, dt - x^2 e^{\operatorname{sen} x}.\end{aligned}$$

2. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.

b) Mostre que F é estritamente crescente e que, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xF(x) > 0$.

c) Prove que se f tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pode ser finito ou $+\infty$.

a) Directamente do Teorema Fundamental do Cálculo; $F'(x) = f(x)$.

b) Como $F'(x) = f(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$, F é estritamente crescente. Temos então $F(x) > F(0) = 0$, para $x > 0$, e $F(x) < F(0) = 0$, para $x < 0$, ou seja, $xF(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Seja $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^+$ e $M \in \mathbb{R}$ tal que, para $x > M$, tem-se $f(x) > \frac{L}{2}$. Então, para $x > M$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^M f(t)\, dt + \int_M^x f(t)\, dt \\ &> \int_0^M f(t)\, dt + \frac{L}{2}\int_M^x 1\, dt = \int_0^M f(t)\, dt + \frac{L}{2}(x - M).\end{aligned}$$

Como $\int_0^M f(t)\, dt$ é constante e $\lim_{x\to+\infty} \frac{L}{2}(x-M) = +\infty$, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Neste caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \leq 1 \end{cases}$$

temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$.

3. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[-1,1] \setminus \{0\}$ tal que $f(0^+)$ e $f(0^-)$ existem em $\mathbb{R}$ e para $x \in [-1,1]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad G(x) = \int_{-x}^x f(t)dt.$$

a) Justifique que F e G estão bem definidas.
b) Mostre que se $f(0^+) \neq f(0^-)$, então F não é diferenciável em 0.
c) Mostre que G é diferenciável em 0 e $G'(0) = f(0^+) + f(0^-)$.

a) f é integrável em $[-1,1]$ porque é contínua excepto num conjunto singular e é limitada (mais precisamente: é integrável em $[-1,0]$ e em $[0,1]$ já que em qualquer desses intervalos coincide com uma função contínua, a menos possivelmente de -1 e 1, respectivamente). Logo é integrável em qualquer intervalo da forma $[0,x]$ e $[-x,x]$, para $x \in [-1,1]$.
b) Usando a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$F'_d(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0^+)$$

e da mesma forma $F'_e(0) = f(0^-)$. Conclui-se que se $f(0^+) \neq f(0^-)$ então F não é diferenciável em 0.
c) Temos $G(x) = \int_{-x}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = -F(-x) + F(x)$. Usando a regra de Cauchy, o Teorema Fundamental do Cálculo e $y = -x$:

$$G'_d(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-F(-x) + F(x)}{x} = \lim_{y\to0^-} f(y) + \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0^-) + f(0^+).$$

Da mesma forma se vê que $G'_e(0) = f(0^-) + f(0^+) = G'_d(0)$, logo G é diferenciável em 0 e $G'(0) = f(0^+) + f(0^-)$.

4. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^x f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\int_{-x}^x g(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

a) Mostre que se f é par e g é ímpar então verificam (4.1).

b) Mostre que se f e g são contínuas e verificam (4.1) então f é par e g é ímpar.

c) Forneça exemplos de funções f e g que verificam (4.1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

a) Sai da definição de integral e de somas superiores e inferiores dado que por exemplo, se f é par, $\sup_{[-x_{k+1},-x_k]} f(x) = \sup_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$, logo todas as somas superiores de f em $[-x,0]$ coincidem com as somas superiores de f em $[0,x]$, e da mesma forma para as somas inferiores, concluindo-se que $\int_{-x}^{0} f(x)\,dx = \int_0^x f(x)\,dx$.

b) Do Teorema Fundamental do Cálculo.

c) Por exemplo, alterar função contínua par / ímpar num número finito de pontos.

5. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

a) Note-se que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{x} = 1$$

pelo que a função integranda *não* é contínua. No entanto só difere em 0 da função contínua $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como alterar uma função num ponto não altera a sua integrabilidade nem o valor do seu integral, a integrabilidade de $\tilde{f}$ implica a integrabilidade de f em qualquer intervalo limitado sendo os integrais de $\tilde{f}$ e f iguais.

b)

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x f = \frac{d}{dx}\int_0^x \tilde{f} = \tilde{f}(x).$$

(Note-se que a não continuidade de f não permite aplicar o teorema fundamental do cálculo para calcular a derivada do integral indefinido de f e tivemos que recorrer à igualdade com o integral de $\tilde{f}$.)

6. Considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$\phi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t \, dt.$$
   a) Calcule $\phi(2)$.
   b) Mostre que ϕ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.
   c) Estude ϕ do ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c > 0$ tal que $\phi(c) = 0$.

   RESOLUÇÃO

   a) $$\phi(2) = \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \ln t \, dt = \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} \ln t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2t(1+t^2)} \, dt$$
   $$= -\frac{\ln 2}{10} + \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{13}{20} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 5.$$
   b) $\phi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln x$, para $x > 0$.
   c) Tem-se $\frac{x}{(1+x^2)^2} > 0$ para qualquer $x > 0$, logo $\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ou seja, ϕ é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]0, 1[$.
   Tem-se $\phi(1) = 0$. Se existisse $c \neq 1$ tal que $\phi(c) = 0$, então, do Teorema de Rolle, existiria um zero de ϕ' entre 1 e c. Como $\phi'(x) \neq 0$ para $x \neq 1$, temos que 1 é o único 0 de ϕ.

7. Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, dt$.
   a) Determine o seu domínio e mostre que f é par.
   b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.
   c) Mostre que existe $a > 0$ tal que f é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim_{x \to 0} f(x)$?

   RESOLUÇÃO

   a) Como a função integranda $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua no seu domínio, será integrável em qualquer intervalo limitado que não contenha 0. Como x e $3x$ têm sempre o mesmo sinal, temos $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   Fazendo a mudança de variável $u = -t$ temos
   $$f(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t} \, dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-1) \, du$$
   $$= \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u} \, du = f(x).$$
   Logo f é par,

b) f é diferenciável uma vez que $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ é contínua (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Temos

$$f'(x) = \left(\int_a^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt - \int_a^{x} \frac{\cos t}{t}\, dt \right)' = 3\,\frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x}$$
$$= \frac{\cos 3x - \cos x}{x},$$

em que tomamos $a > 0$, para $x > 0$, e $a < 0$, para $x < 0$.

c) Como cos é decrescente em $]0, \pi[$, temos que para $0 < 3x < \pi$, $\cos(3x) < \cos x$, logo $f'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} < 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$, ou seja f é monótona decrescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$. Por outro lado, para $x > 0$,

$$\left| \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt \right| \le \int_x^{3x} \frac{|\cos t|}{|t|}\, dt \le \int_x^{3x} \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_x^{3x} = \ln 3.$$

Logo f é limitada em $]0, \frac{\pi}{3}[\subset]0, +\infty[$.
Conclui-se que existe $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Como f é par, existe também $f(0^-) = f(0^+)$, logo existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

8. Sendo $\phi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, se $x \neq 0$ e $\phi(0) = 0$, considere a função $g(x) = \int_0^x \phi(t)\, dt$.

(a) Justifique que g é ímpar.
(b) Determine $g'(x)$, para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$.
(c) Indique as abcissas dos pontos onde o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.
(d) Justifique que g é limitada.

RESOLUÇÃO

(a) $g(-x) = \int_0^{-x} \phi(t)\, dt = \int_0^{x} \phi(-u)(-1)\, du = -g(x)$, notando que ϕ é par.
(b) Para $x \neq 0$ temos do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Em $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \phi(t)\, dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativamente, poderiamos considerar a função $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$, para $x \neq 0$ e $\tilde{\phi}(0) = \lim_{x\to 0} \phi(x) = \dfrac{1}{2}$, que é contínua em $\mathbb{R}$, e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a $\tilde{\phi}$ em $\mathbb{R}$.)

(c) $g'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(d) Como g é ímpar, é suficente considerar $x \geq 0$. Temos que g é limitada em qualquer intervalo $[0, a]$, $a > 0$, uma vez que é contínua (decorre da continuidade do integral indefinido de qualquer função integrável). Para $x \in [a, +\infty[$ podemos majorar $g(x)$ por

$$g(a) + \int_a^x \frac{2}{x^2} = g(a) - \frac{2}{x} + \frac{2}{a} \leq g(a) + \frac{2}{a}.$$

9. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então

a) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\, dt$ é uma função constante em $\mathbb{R}$.

b) Sendo F uma primitiva de f, F será também periódica de período T se e só se $\int_0^T f(t)\, dt = 0$.

RESOLUÇÃO

a) Usando a continuidade da função integranda para justificar a diferenciabilidade de $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ pode derivar-se o integral e usar a periodicidade da função para mostrar que o integral tem derivada nula, pelo que é constante. Com efeito:

$$G'(x) = \left(\int_x^{x+T} f(t)\, dt \right)' = f(x+T) - f(x) = 0$$

(Note-se que a justificação anterior não é possível se não se supuser que f é contínua. No entanto a conclusão continua a ser verdadeira! é necessário nesse caso usar mudança de variável e a aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração - verifique!).

b) Se F é uma primitiva de f e é periódica de período T, temos

$$\int_0^T f(t)\, dt = F(T) - F(0) = 0.$$

Reciprocamente, se $\int_0^T f(t)\, dt = 0$ então da alíena anterior, temos

$$G(x) = G(0) = 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)\, dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0.$$

Logo F é periódica de período T.

4.4 Integração e cálculo de Áreas

1. Calcule o valor dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_1^\pi x \operatorname{arctg} x\, dx,$ d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3}\, dx,$ g) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) dx,$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx,$ e) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx,$ h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx,$

c) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\, dx,$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\, dt,$ i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx,$

RESOLUÇÃO

a) $$\int_1^\pi x \operatorname{arctg} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8}$$
$$-\frac{1}{2}\int_1^\pi (1 - \frac{1}{1+x^2})\, dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_1^\pi$$
$$= \frac{\pi^2+1}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

b) $$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

c) $$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi$$
$$= -\cos\pi + \frac{1}{3}\cos^3\pi + \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 = \frac{4}{3}.$$

d) $$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\, dx = [\ln|x-3|]_0^1 = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}.$$

e) $$\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx = \int_2^4 \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|\right]_2^4 = \frac{80}{3} + \ln 3.$$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\, dt = \int_1^e \frac{1}{x+x^2}\frac{1}{x}\, dx = \int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx,$ fazendo a mudança de variável $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$. Tem-se
$$\frac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$
(verifique) e portanto
$$\int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\, dx = -1 - \frac{1}{e} + \ln(1+e) + 0 + 1 - \ln 2 = -\frac{1}{e} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

g) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2} - \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{x^2}{2}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\, dx$

$\displaystyle= 2\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)\sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x(\sqrt{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x)\, dx$

$\displaystyle= \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^{\frac{7}{2}} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{7} = \frac{8}{21}.$

i) Fazendo a substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \ln t$, temos $x = 0 \Leftrightarrow t = e^0 = 1$ e $x = 1 \Leftrightarrow t = e$, logo

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int_1^e \frac{1}{t(1+t)}\, dt = \int_1^e -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t}\, dt = [-\ln|1+t| + \ln|t|]_1^e$

$= -\ln(1+e) + 1 + \ln 2.$

OU escrever $\displaystyle\frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}.$

2. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

RESOLUÇÃO

De $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ temos $y = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. A área fica (fazendo a substituição $x = 2\operatorname{sen} t$):

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\, dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)\, dt = 4\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

3. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y = \ln(1+x)$, $y = -\ln(1+x)$, $x = e-1$

b) $y = \ln(1+x^2)$, $y = \ln 2$,

c) $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$,

d) $y^2 = 4(1-x)$ e $y^2 = 2(2-x)$.

a) $\displaystyle A = \int_0^{e-1} 2\ln(1+x)\, dx = [2x\ln(1+x)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}\, dx$

$\displaystyle= 2(e-1) - 2\int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{x+1}\, dx = 2(e-1) - 2\,[x - \ln|x+1|]_0^{e-1} = 2(e-1) - 2(e-1) + 2 = 2.$

b) Os pontos de intersecção são em $x = 1$ e $x = -1$ e, em $[-1, 1]$, $\ln(1 + x^2) \leq \ln 2$, logo

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} \ln 2 - \ln(1 + x^2)\, dx = 2 \int_{0}^{1} \ln 2 - \ln(1 + x^2)\, dx \\ &= 2 \ln 2 - 2[x \ln(1 + x^2)]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2 + 1}\, dx \\ &= 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + 4 \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = 4[x - \operatorname{arctg} x]_0^1 = 4(1 - \frac{\pi}{4}) = 4 - \pi. \end{aligned}$$

c) As curvas intersectam-se nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1)$, e para $x \in [1, e]$, $\ln x \geq \ln^2 x$. Temos

$$\begin{aligned} A = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx &= \left[x\left(\ln x - \ln^2 x\right)\right]_1^e - \int_1^e x\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x} \ln x\right) dx \\ &= e(1 - 1) - 1(0 - 0) - [x]_1^e + \int_1^e 2 \ln x\, dx \\ &= -e + 1 + [2x \ln x]_1^e - \int_1^e 2\, dx = 3 - e. \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 \left(\sqrt{2(2 - x)} - \sqrt{4(1 - x)}\right) dx + 2 \int_1^2 \sqrt{2(2 - x)}\, dx \\ &= 2 \int_0^2 \sqrt{2(2 - x)}\, dx - 2 \int_0^1 \sqrt{4(1 - x)}\, dx = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Alternativamente, integrar em y: as linhas são $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ e $x = 2 - \frac{y^2}{2}$ e temos $A = 2 \int_0^2 \left(2 - \frac{y^2}{2} - 1 + \frac{y^2}{4}\right) dy.$

4. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 \leq y \leq 2(x + 1)\right\}$, b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (1 - x) \operatorname{arctg} x\right\}$.

RESOLUÇÃO

a) Temos $(x + 1)^2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$ e $2(x + 1) > (x + 1)^2 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$, logo

$$A = \int_{-1}^{1} 2(x + 1) - (x + 1)^2\, dx = \left[(x + 1)^2 - \frac{1}{3}(x + 1)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

b) Temos $(1 - x) \operatorname{arctg} x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$ e $(1 - x) \operatorname{arctg} x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 1[$, logo

$$A = \int_0^1 (1-x)\operatorname{arctg} x\,dx = \left[(x - \frac{x^2}{2})\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2}}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

5 SÉRIES

5.1 Séries Numéricas

1. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^4-1}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1-2^n}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}}$, k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$, n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$,

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$, r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

RESOLUÇÃO

NOTA: uma série de termos não negativos converge se e só se converge absolutamente (já que $a_n = |a_n|$).

a) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparemos com a série $\sum \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ a qual é divergente. Como,

$$\lim \frac{\frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = 1 \neq 0, +\infty, \qquad \text{(verifique)}$$

concluimos que a série dada e a série $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ têm a mesma natureza. Logo a série dada é divergente, já que é uma série de Dirichlet da forma $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ com $\alpha = 1/2 < 1$.

b) Trata-se de uma série de termos não negativos. Usando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+(n+1)!}}{\frac{2^n}{n^2+n!}} = \frac{2(n^2+n!)}{(n+1)^2+(n+1)!} = 2\frac{n!}{(n+1)!}\frac{\frac{n^2}{n!}+1}{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}+1} \to 2\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Como este limite é menor que 1, concluimos que a série dada é (absolutamente) convergente.

c) Procedendo como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n^3}$. Logo, é (absolutamente) convergente.

d) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\frac{2^n}{(2n)!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

e) Como $\frac{1+2^n}{1-2^n} = \frac{2^{-n}+1}{2^{-n}-1} \to -1 \neq 0$, concluimos que a série é divergente.

f) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério da raiz (ou de Cauchy):

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n} = \frac{n}{2n+\sqrt{n}} = \frac{1}{2+n^{-\frac{1}{2}}} \to \frac{1}{2}.$$

Como este limite é inferior a 1 concluimos que a série é (absolutamente) convergente.

g) (Comece por reparar que, contrariamente a e), a sucessão do termo geral desta série converge para 0 o que não nos permite tirar qualquer conclusão sobre a convergência ou divergência da série.)

Tratando-se de uma série de termos não negativos, podemos tentar usar o critério de d'Alembert:

$$\frac{\frac{1+2^{n+2}}{1+3^{n+1}}}{\frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}} = \frac{1+2^{n+2}}{1+2^{n+1}}\frac{1+3^n}{1+3^{n+1}} = \frac{2^{-(n+1)}+2}{2^{-(n+1)}+1}\frac{3^{-n}+1}{3^{-n}+3} \to \frac{2}{3}.$$

Como este limite é inferior a 1 a série é (absolutamente) convergente.

(Alternativamente: usar o critério geral de comparação com $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$.)

h) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

Como este limite é superior a 1 concluimos que a série é divergente.

i) Como em h), neste caso a série converge.

j) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n}$. Logo, é divergente.

k) Como em a) concluimos que a série tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Logo, é divergente.

l) Trata-se de uma série de termos não negativos. Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{(1000)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(1000)^n}{n!}} = \lim 1000 \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1000}{n+1} = 0.$$

Como este limite é inferior a 1, a série é (absolutamente) convergente.

m) Repare-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ é uma série de termos não negativos, já que $n < 2^n$ e $n^2 < 3^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (por indução)[1],
Aplicando o critério de d'Alembert,

$$\lim \frac{\frac{n+1-2^{n+1}}{(n+1)^2-3^{n+1}}}{\frac{n-2^n}{n^2-3^n}} = \frac{2}{3} < 1$$

(verifique), logo a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$ converge (absolutamente) .

n) Trata-se de uma série de termos não negativos. Tentemos aplicar o critério de Cauchy:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1.$$

Logo, a série é (absolutamente) convergente.

o) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \operatorname{arctg} n \frac{n^2}{n^2-1} \to \frac{\pi}{2} \neq 0, \infty.$$

Logo, as séries têm a mesma natureza, ou seja, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$ é (absolutamente) convergente.

p) Temos

$$\lim n \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Como o termo geral não converge para 0, a série diverge.

q) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0, \infty.$$

Do critério geral de comparação, as séries têm a mesma natureza, ou seja, convergem (absolutamente).

r) Trata-se de uma série de termos não negativos. Comparando com a série divergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\ln n} \to +\infty.$$

Logo, $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, a partir de determinada ordem, e do critério geral de comparação, a série diverge.

2. a) Justifique que se f é uma função real tal que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão $a_n \geq 0$ com $a_n \to 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Determine a natureza das séries seguintes, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

RESOLUÇÃO

a) Para $a_n \geq 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ são de termos não negativos, já que se $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0$, então $f(x) > 0$ em $]0, a[$ para algum $a > 0$, logo $f(a_n) > 0$. Como $a_n \to 0^+$, tem-se

$$\lim \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L > 0.$$

Como $L \neq 0, +\infty$, segue do critério geral de comparação que $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

b) Segue directamente de a), notando que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

que as séries dadas convergem se e só se $\alpha > 1$, por comparação com as séries de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

3. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+n}{n}\right)$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{3000}}{3^n}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

RESOLUÇÃO

a) O termo geral da série é uma sucessão divergente já que possui dois sublimites diferentes: 1 e -1. Logo, como o termo geral da série não tende para 0 concluimos que a série é divergente.

b) (Comece por observar que, contrariamente ao caso anterior, a sucessão do termo geral da série converge para 0 o que não nos permite tirar nenhuma conclusão sobre a convergência da série. Observe igualmente que não se trata de uma série de termos não negativos pelo que os critérios anteriormente usados para esse tipo de séries (comparação, d'Alembert, Cauchy) não podem ser directamente aplicados aqui).
Estudemos a série de módulos correspondente. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n n}{n^3+2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2},$$

por comparação desta série de termos positivos com a série convergente $\sum\frac{1}{n^2}$ concluimos que esta série é convergente e, portanto a série dada é absolutamente convergente.

c) Esta série é absolutamente convergente, uma vez que a série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{3000}}{3^n}$, que é convergente (usando o Critério de d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{1}{3}<1$).

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$. Consideremos a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$, e comparêmo-la com a série divergente $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\frac{\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1}\to\frac{1}{2}\neq 0,+\infty$$

logo a série de módulos considerada é também divergente. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Tratando-se de uma série alternada tentemos usar o critério de Leibniz: considere-se a série dada na forma $\sum(-1)^n a_n$ com $a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}>0$. Como

$$a_{n+1}-a_n = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<0$$

o que mostra que a sucessão de termo geral a_n é decrescente, e como $a_n\to 0$, podemos concluir, pelo critério de Leibniz, que a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

Uma observação: o critério de Leibniz só decide da convergência de uma série, nada dizendo sobre a convergência ser simples ou absoluta. O resultado anterior foi obtido depois de termos verificado previamente que a convergência não poderia ser absoluta.

e) É uma série alternada. Considerando a série dos módulos correspondente $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, vemos que será divergente, uma vez que

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

e portanto a série dos módulos tem a mesma natureza que a série harmónica. Concluimos que a série dada não pode ser absolutamente convergente. Escrevendo a série dada na forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, temos que $a_n \to 0$ e a_n é decrescente, uma vez que a função sen x é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{n}$ é decrescente. Do critério de Leibniz, a série dada converge. Logo, a série é simplesmente convergente.

f) É uma série alternada. A série dos módulos é dada por $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, que é divergente (uma vez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge sse $\alpha > 1$). Concluimos que a série dada não é absolutamente convergente. Escrevendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, temos que $a_n \to 0$, $a_n > 0$ e

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}} > 0$$

ou seja, (a_n) é decrescente. Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente. Logo, a série é simplesmente convergente.

5.2 Séries de potências e séries de Taylor

1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries de potências convergem absolutamente, convergem simplesmente ou divergem:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$,

RESOLUÇÃO

a) Temos $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{x}{2}$. Logo, converge absolutamente para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ e diverge para $\left|\frac{x}{2}\right| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -2 \wedge x \geq 2$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ é uma série de potências, centrada em -2, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{(n+2)2^n}}{\frac{1}{(n+3)2^{n+1}}} = \lim \frac{2(n+3)}{(n+2)} = 2.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x+2| < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$ e divergente para $|x+2| > 2 \Leftrightarrow x < -4 \wedge x > 0$. Para $|x+2| = 2$, temos:

- Se $x = 0$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2}$, que é divergente por comparação com a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = -4$: obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente é divergente, logo esta série não é absolutamente convergente. No entanto, aplicando o critério de Leibniz, como $0 < \frac{1}{n+2}$ é decrescente, tem-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ é convergente, logo converge simplesmente.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$ converge absolutamente para $x \in]-4, 0[$, converge simplesmente para $x = -4$ e diverge para $x \in]-\infty, -4[\cup[0, +\infty[$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4x)^n}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{2n}$, fazendo $y = -4x$. É uma série de potências com raio de convergência dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ e divergente para $|y| > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{1}{4}$. Para $|y| = 1$, temos:

- Se $x = -\frac{1}{4}$: obtemos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ que é divergente por comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
- Se $x = \frac{1}{4}$: obtemos a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$. Já vimos que a série dos módulos correspondente diverge, portanto a série não converge absolutamente. Do critério de Leibniz, uma vez que $\frac{1}{2n} \to 0$ e é decrescente, a série converge, e portanto converge simplesmente.

  Conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$ converge absolutamente se $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, converge simplesmente para $x = \frac{1}{4}$ e diverge se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} x^n$ é uma série de potências, centrada em 0, cujo raio de convergência é dado por

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right|}} = \lim \frac{n+1}{n} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x| < 1$ e divergente para $|x| > 1$. Para $|x| = 1$, temos:

- Se $x = 1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Uma vez que

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to e^{-1},$$

concluimos que a série diverge uma vez que o termo geral não converge para 0.
- Se $x = -1$: obtemos a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$. Já vimos que $\lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-1}$, logo $(-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}$ tem dois sublimites e^{-1} e $-e^{-1}$, e a série é portanto divergente, uma vez que o termo geral não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}$ converge absolutamente para $x \in]-1, 1[$ e diverge para $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$: é uma série de potências, centrada em 1, cujo raio de convergência é dado por

$$\begin{aligned} R = \lim \frac{\frac{n!}{n!+1}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}} &= \lim \frac{n!}{(n+1)!} \frac{(n+1)!+1}{n!+1} \\ &= \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)(n!+1)} = \lim \frac{(n+1)!+1}{(n+1)!+(n+1)} \\ &= \lim \frac{1+\frac{1}{(n+1)!}}{1+\frac{1}{n!}} = 1. \end{aligned}$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|x-1| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ e divergente para $|x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$. Para $|x-1| = 1$, temos:

- Se $x = 2$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!+1}$, que é divergente uma vez que $\frac{n!}{n!+1} \to 1 \neq 0$.
- Se $x = 0$, obtem-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(-1)^n}{n!+1}$, que também é divergente, uma vez que $\frac{n!(-1)^n}{n!+1}$ tem dois sublimites -1 e 1, logo o termo geral da série não converge para 0.

Conclui-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}$ converge absolutamente para $x \in]0, 2[$ e diverge para $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

2. Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}(x^2 - x)^n$.

RESOLUÇÃO

a) Faça-se $y = (2x)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}.$$

Esta é uma série de potências cujo raio de convergência e dado por

$$R = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = 1.$$

Logo, a série é absolutamente convergente para $|y| < 1$ e divergente para $|y| > 1$. Se $y = 1$ obtemos a série $\sum \frac{1}{n+1}$. Como $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \to 1$, esta série tem a mesma natureza que a série harmónica $\sum \frac{1}{n}$, ou seja, é divergente. Se $y = -1$, obtemos a série alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$. Dado que $\frac{1}{n+1} \to 0$ e que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$, deduz-se, aplicando o critério de Leibniz, que a série é convergente. Como $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \sum \frac{1}{n+1}$ e já vimos que esta série é divergente, concluimos que para $y = -1$ a série é simplesmente convergente. Então, como

$$|y| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |(2x)^3| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{2},$$

$$y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2},$$

concluimos que a série de potências dada é absolutamente convergente se $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, simplesmente convergente se $x = -\frac{1}{2}$ e divergente se $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} y^n$ é dado por

$$R = \lim \frac{\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}}{\frac{2^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}} = \lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{2(n+1)^2} = 2$$

(verificar!), logo a série converge absolutamente para $|y| < 2$ e diverge para $|y| > 2$. Para $|y| = 2$, temos que

$$\frac{\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$$

(verifique!), logo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ é divergente ($\frac{4^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$ é crescente, e assim não converge para 0).

– se $y = -2$, obtemos a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ que é também divergente uma vez que o seu termo geral não converge para zero (terá dois sublimites diferentes).

Conclui-se que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} y^n$ converge absolutamente para $|y| < 2$ e diverge para $|y| \geq 2$. Fazendo $y = x^2 - x$ e resolvendo em ordem a x, temos então que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} (x^2 - x)^n$ converge absolutamente para $-1 < x < 2$ e diverge para $x \leq -1 \vee x \geq 2$.

3. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite para determinar as respectivas derivadas de ordem n em a.

   a) $f(x) = (x-1)e^x, \quad a = 1,$

   b) $f(x) = e^{2x+1}, \quad a = 0,$

   c) $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}, \quad a = 0,$

   d) $f(x) = \cos(x+1)^2, \quad a = -1,$

   e) $f(x) = \ln x, \quad a = 2,$

   f) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt, \quad a = 0,$

   g) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt, \quad a = 0,$

   h) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad a = 0,$

   i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 1,$

   j) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad a = 0,$

   k) $f(x) = \ln(x^2+1), \quad a = 0.$

   RESOLUÇÃO

4. a) $$(x-1)e^x = (x-1)e\, e^{x-1} = (x-1)e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(x-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{(n-1)!}(x-1)^n.$$

   Temos $\dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = \dfrac{e}{(n-1)!} \Leftrightarrow f^{(n)}(1) = n\, e.$

   b) $e^{2x+1} = e \cdot e^{2x} = e \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} e \frac{2^n}{n!} x^n$, para $x \in \mathbb{R}$. Temos $f^{(n)}(0) = e\, 2^n$.

   c) $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{x}{1-(-2x)} = x \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} 2^{n-1} x^n$, para $|2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.
   Temos $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{n-1}2^{n-1}$.

   d) $\cos(x+1)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x+1)^{4n}$, para $x \in \mathbb{R}$.

   Temos $f^{(4n)}(-1) = (4n)! \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $f^{(k)}(-1) = 0$, se $k \neq 4n$ (se não é múltiplo de 4).

e) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2+(x-2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x-2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$, para $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 4$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(x-2)^n + C.$$

Fazendo $x = 2$, temos $C = \ln 2$.
Temos $f^{(n)}(0) = n!\,\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$, para $n \geq 1$ e $f(0) = \ln 2$.

f) Do Teorema Fundamental do Cálculo, $\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)' = e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, para $x \in \mathbb{R}$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(2n+1)}(0) = (2n+1)!\,\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = (2n)!\,\frac{(-1)^n}{n!}$ e $f^{(2n)}(0) = 0$.

g) Do Teorema Fundamental do Cálculo, $\left(\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt\right)' = \operatorname{sen}(x^2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{4n+2}$. para $x \in \mathbb{R}$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\int_0^x \operatorname{sen} t^2\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}x^{4n+3} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(4n+3)}(0) = (4n+3)!\frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} = \frac{(-1)^n(4n+2)!}{(2n+1)!}$ e $f^{(k)}(0) = 0$. para $k \neq 4n+3$.

h) $P\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}\right) = -\dfrac{1}{x+1} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$, para $|x| < 1$. Logo, derivando termo a termo,

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n x^n.$$

Temos $f^{(n)}(0) = n!(n+1)(-1)^n = (n+1)!(-1)^n$.

i) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2+(x-1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-1)^n$, para $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.
Temos $f^{(n)}(1) = \frac{n!(-1)^n}{2^{n+1}}$.

j) $(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}$, para $|y^2| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\operatorname{arctg} y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}y^{2n+1} + C.$$

Fazendo $y = 0$, temos $C = 0$. Temos assim para $-1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$$\operatorname{arctg} x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2}.$$

Temos $f^{(4n+2)}(0) = (4n+2)!\,\frac{(-1)^n}{2n+1}$, e $f^{(k)}(0) = 0$ para $k \neq 4n+2$.

k) $(\ln(x^2+1))' = \dfrac{2x}{x^2+1} = 2x\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1}$, para $-1 < x < 1$. Logo, primitivando termo a termo,

$$\ln(x^2+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+2} x^{2n+2} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{2n} + C.$$

Fazendo $x = 0$, temos $C = 0$.
Temos $f^{(2n)}(0) = (2n)!\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt