Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

FICHA 14

Séries de potências. Séries de Taylor.

AULA PRÁTICA

1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries de potências convergem absolutamente, convergem simplesmente ou divergem:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n(n+1)}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n(x-2)^n}{(4n)^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+8^n}(x-1)^n$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+3)^n}{n^2+n+1}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2(x-2)^n}{(2n)!}$.

2. Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}$.

3. Calcule o domínio de convergência e a soma das séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!3^n}x^n$.

4. a) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ e indique, justificando, em que pontos é que a série converge absolutamente.

   b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

   no conjunto de todos os pontos onde a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor no ponto 1 da função $x + g'(x)$.

5. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^4}{1-2x}$.

   a) Desenvolva f em série de potências de x e indique um intervalo aberto no qual a função coincide com a série obtida.

   b) Utilize o desenvolvimento em série encontrado para determinar $f^{(n)}(0)$ e justifique que f tem um mínimo local em 0.

6. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Determine as respectivas derivadas de ordem n em a.

a) $f(x) = (x-2)^2\, e^x, \quad a = 2,$

b) $f(x) = \ln|x|, \quad a = -1,$

c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt, \quad a = 0,$

d) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}, \quad a = 0,$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries de potências convergem absolutamente, convergem simplesmente ou divergem:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1},$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n+1},$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n,$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}(1-x)^n,$

   e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}},$

   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{(n+1)^n}.$

2. Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as seguintes séries:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3x)^{2n}}{4^n(n+1)},$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1},$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n,$

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n,$

3. Suponha que a série de potências de x

$$\sum a_n x^n$$

   é convergente no ponto -3 e divergente no ponto 3:

   a) Indique, justificando, se a convergência da série no ponto -3 é simples ou absoluta.

   b) Indique o conjunto dos valores de x para os quais a série é absolutamente convergente e o conjunto dos valores de x para os quais a série é divergente.

   c) Dê um exemplo de uma série que verifique as condições requeridas no enunciado.

4. Calcule o domínio de convergência e a soma das séries seguintes:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2},$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^n,$

5. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite para determinar as respectivas derivadas de ordem n em a.

a) $f(x) = e^{3x-1}, \quad a = 0,$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{4x+1}, \quad a = 0,$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x-1)^2, \quad a = 1,$

d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos t^3 \, dt, \quad a = 0,$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}, \quad a = 2,$

f) $f(x) = x \operatorname{arctg}(2x), \quad a = 0,$

6. Desenvolva em série de Taylor em $a = 0$ a função $\phi(x) = x \ln(1 + x^3)$ e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto 0 (mostre que $\phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0$ e observe o sinal de $\phi^{(4)}(0)$).

7. Desenvolva a função
$$\phi(x) = \int_0^{x^2} \ln(1 + t^2) \, dt$$
em série de Taylor em $a = 0$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Decida se ϕ tem um extremo em 0; em caso afirmativo, classifique-o.