

FICHA 13

CrITÉRIOS de convergência. Convergência absoluta e simples.

**AULA PRÁTICA**

1. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos (pode usar que a série de Dirichlet  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge se e só se  $\alpha > 1$ ):

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{n^2+2}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$       d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n-1}$

2. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3}{3^{2n}}$ ,      b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ ,      c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$       d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2+1}{4n^2+\ln n} \right)^n$ .

3. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

i)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ,      ii)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ ,

(Sugestão: Utilize o critério do integral para i) e o critério de comparação para ii).)

4. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ ,      c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ,      e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+\sqrt{n}} \right)^n$ ,  
 b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$ ,      d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$ ,      f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$ .

5. Sendo  $(a_n)$  o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries

$$\sum (1 + a_n), \quad \sum \frac{1}{n^2 + a_n}.$$

6. Mostre que se  $\sum |a_n|$  converge então, para cada  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\sum a_n^p$  também converge. Para cada  $p \in \mathbb{N}$ , dê um exemplo em que  $\sum a_n^p$  converge mas  $\sum |a_n|$  diverge.

7. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-4)^{-n+1}$       e)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ,  
 b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$ ,      d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}$ ,      f)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ ,

**EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES**

1. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos (pode usar que a série de Dirichlet  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge se e só se  $\alpha > 1$ ):

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{3n+1} & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}} & \text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+1} \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+1} & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1} & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n+1} \end{array}$$

2. Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2^{2n}+1}{3^n+n} \right)^n, \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n}{b^n}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+, & \end{array}$$

3. a) Determine a natureza das seguintes séries de termos não-negativos:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}, \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}.$$

b) Justifique que as séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln n}$$

divergem para  $\alpha \leq 1$  e convergem para  $\alpha > 1$ .

4. a) Justifique que se  $f$  é uma função real tal que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão  $a_n \geq 0$  com  $a_n \rightarrow 0$ , as séries  $\sum a_n$  e  $\sum f(a_n)$  têm a mesma natureza.

b) Determine a natureza das séries seguintes, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{1}{n^\alpha} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1 \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

5. Determine a natureza das seguintes séries, usando critérios de convergência apropriados:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}, \quad \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}},$$

$$\begin{array}{lll}
\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}, & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^3, & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^3}, \\
\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}, & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n}, & \text{m)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, \\
\text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}, & \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n!}{n!}, & \text{n)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}, \\
\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}, & \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n, & \text{o)} \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n},
\end{array}$$

6. Seja  $(a_n)$  uma sucessão de termos positivos e  $(b_n)$  uma sucessão limitada.

- Mostre que a convergência da série  $\sum a_n$  implica a convergência da série  $\sum a_n b_n$ .
- Use o resultado anterior para provar que se a série  $\sum a_n$  converge então também converge  $\sum a_n^2$ .
- Mostre, por meio de um contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

7. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries alternadas:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, & \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}, & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}, \\
\text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}, & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}, & \text{f)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.
\end{array}$$