## Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

## FICHA 12

Integração, cálculo de Áreas. Séries geométricas e de Mengoli.

---

### AULA PRÁTICA

1. Calcule o valor dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x \operatorname{arctg}(x^2)\,dx\,,$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x-2)^2}\,dx,$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2}{e^{2x}+1}\,dx,$

d) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} x \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x}\right)\,dx,$

e) $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx,$

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln(1+\sqrt{x})\,dx,$

g) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\,dx,$

h) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{1}{x\sqrt{4+x}}\,dx.$

2. Sendo $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}}\,dt$, $x > 0$, mostre que

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x).$$

3. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y = 4 - x^2$ e $y = |x| - 2$,

b) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$,

c) $y = xe^{x-1}\,,\ y = 1$ e $x = 0\,,$

d) $y = e^x\,,\ y = e^{-x}$ e $x = 2\,,$

e) $y = \operatorname{arctg} x$, $x = 1$ e $y = 0$,

f) $y^2 = 4(1-x)$ e $y^2 = 2(2-x)$,

4. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

5. Calcule a área de região plana constituída pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \le y \le \frac{\pi}{4}, \qquad y \ge \frac{\pi}{16} x^2, \qquad y \le \operatorname{arctg} x.$$

6. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{2} \le y \le x^2\,, y \le x\}$,

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ y \ge x,\ y \ge x^3,\ y \le 4x\}$,

c) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 \le y \le 2(x+1)\big\}$,

d) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}\right\}$

e) $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le (1-x)\operatorname{arctg} x\big\}$,

f) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \ln 2,\ 0 \le y \le \dfrac{1}{3-e^x}\right\}$.

7. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{4}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} = \frac{5}{3}$

8. Mostre que cada uma das séries seguintes é uma série de Mengoli, estude a sua convergência e, em caso de convergência, determine a sua soma:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$,

9. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, neste caso, a sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi^{-n+2}$, e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n+1}\right)$, d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n}{4^n}$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n))$.

---

## EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Calcule o valor dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$, d) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$, g) $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\,dx$, h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^3 x}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-4}\,dx$, f) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$,

2. Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

a) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$,
b) $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$,
c) $y = e^x$, $y = 1 - x$, $x = 1$,
d) $y = \ln(1+x)$, $y = -\ln(1+x)$, $x = e-1$,
e) $y = \ln(1+x^2)$, $y = \ln 2$,
f) $y = x^2 - \frac{\pi^2}{4}$, $y = \cos x$,
g) $y = \ln x$ e $y = \ln^2 x$,
h) $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$,
i) $x^2 y = 1$, $y = -27x$, e $x = -8y$.

3. Calcule a área de região plana definida pelas condições $x^2 + y^2 \le 4$ e $y \ge \sqrt{3}x^2$.

4. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões do plano:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \le y \le x\,,\ y \ge x^2\}$,

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le |x|\}$,

c) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le \ln x \wedge x\le a\right\},\ a>1$,

d) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}\right\}$,

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le x\operatorname{sen} x\}$.

f) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1, 0\le y\le \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}.\right\}$.

5. Seja $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ através da expressão $F(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\,dt$. Justifique que $F$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e mostre que

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(xF(x)+\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad x>0.$$

( Sugestão: considere a mudança de variável $tx=y$.)

6. Mostre que, para qualquer $x>0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

7. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=3$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}=9$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\frac{3}{2}$,

8. Mostre que cada uma das séries seguintes é uma série de Mengoli, estude a sua convergência e, em caso de convergência, determine a sua soma:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$.

9. Use as fórmulas explícitas para a sucessão de somas parciais de cada uma das séries seguintes, provadas por indução na Ficha 2 [21] para mostrar que:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=2$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}=1$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-2)^2}{2^k}=2$, d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ é divergente.

[21] Ver Ficha 2 - Aula Prática Ex. 4.b), Suplementares 1.f), 4.c), d).

10. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, neste caso, a sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^n \pi^{-2n}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}\right)$,

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n) 2^{-n}$,