Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

FICHA 11

Integral. Teorema Fundamental do Cálculo e Regra de Barrow.
Integração.

AULA PRÁTICA

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Mostre que :

   a) se existe $c \in [a, b]$ com $f(c) > 0$ então $\int_a^b f(x)dx > 0$;

   b) se $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ então $f(x) = 0$ para qualquer $x \in [a, b]$.

2. Calcule o valor médio de f no intervalo indicado e verifique o teorema da Média:

   a) $f(x) = 2x$ em $[1, 4]$, b) $f(x) = x$ em $[2, 4]$, c) $f(x) = x$ em $[-1, 2]$.

3. Determine as derivadas das funções seguintes:

   a) $\int_x^{2\pi} \cos(t^2)\, dt$, b) $\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$, c) $\int_1^{x^2} x \cos(\sqrt{t})\, dt$.

4. Mostre que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ verificando a condição

$$\int_0^x f(t)\, dt = x f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

   então f é uma função constante. (Sugestão: derive ambos os membros da igualdade anterior).

5. Calcule os limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\, dt}{x^4}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t e^{\sqrt{t}}\, dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1)\, dt}.$$

6. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

$$\text{a) } g(x) = \int_2^{e^{x+1}} \frac{1}{\ln t}\, dt, \qquad \text{b) } h(x) = \int_1^x (x - t)e^{t^2} .$$

7. Calcule o valor dos integrais seguintes, usando a Regra de Barrow:

$$\text{a) } \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx \qquad \text{b) } \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx \qquad \text{c) } \int_{-1}^{1} \frac{3 \operatorname{arctg}^2 x}{1 + x^2}\, dx$$

8. Calcule o valor dos integrais seguintes, usando integração por partes:

$$\text{a) } \int_{-1}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx, \qquad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \operatorname{arctg} x\, dx, \qquad \text{c) } \int_0^{\pi} \operatorname{sh} x \operatorname{sen} x\, dx.$$

9. Calcule o valor dos integrais seguintes, utilizando as substituições indicadas:

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}\,dx, \quad t=\sqrt{x},$

b) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x+1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx, \quad t=\ln x,$

c) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dx, \quad t=e^x,$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx, \quad t=\operatorname{tg} x$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x(1+\cos^2(x))}\,dx,\ t=\cos x$

f) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx,\ x=\sec t.$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Considere a função f definida no intervalo $[0,2]$ por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in[0,1[\\ 2 & \text{se } x=1 \\ 3 & \text{se } x\in]1,2] \end{cases}$$

a) Mostre que, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe uma decomposição d_n do intervalo $[0,2]$ tal que as somas superior $S_{d_n}(f)$ e inferior $s_{d_n}(f)$ verificam

$$S_{d_n}(f)-s_{d_n}(f)<\frac{1}{n}, \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_{d_n}(f)=\lim_{n\to+\infty} s_{d_n}(f)=4.$$

b) Justifique que f é integrável em $[0,2]$ e que $\int_0^2 f(x)dx=4$.

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Mostre que $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=1/2$.

b) Justifique que f não é integrável em $[0,1]$.

3. a) Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx=0$, existe pelo menos uma raiz da equação $f(x)=0$ no intervalo $[a,b]$.

b) Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que se $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ então existe pelo menos um ponto $c\in]a,b[$ tal que $f(c)=g(c)$.

4. Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que se é nulo o integral de f em *qualquer* intervalo limitado, então $f(x)=0$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x)=0$ para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

5. Prove que, se f é contínua em $[a,b]$ e g é integrável e não negativa em $[a,b]$, existe $c\in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

6. Determine as derivadas das funções seguintes:

a) $\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, b) $\int_x^{2x} e^{t^2}\,dt$, c) $\int_{x^2}^{x^4} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt$,

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\psi(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Justifique que ψ é duas vezes diferenciável e que $\psi''(x) = f(x)$.

8. Mostre que a função seguinte é constante (ie não depende de x):
$$\psi(x) = \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

9. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
Prove que F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável em 0.

10. Sejam u e v funções contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\int_a^x u(t)\,dt = \int_b^x v(t)\,dt$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $u = v$ e $\int_a^b u(t)\,dt = 0$.

11. Calcule o limite:
$$\lim_{x\to+\infty} x \int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt,$$

12. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt$, b) $g(x) = \displaystyle\int_{-2x}^{-1} e^{1/t^2}\,dt$.

13. Supondo que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ e $f'(x) < 0$, considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por
$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt.$$
(a) Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raizes da equação $g(x) = 0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g.
(b) A função g é majorada? E minorada?

14. Calcule o valor dos integrais seguintes:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{tg} x\,dx$, d) $\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ e) $\displaystyle\int_{-1}^0 xe^{x^2}\,dx$.

15. Calcule o valor dos integrais seguintes, usando integração por partes:

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh}(x)\cos(\pi x)\,dx$.

16. Considere a função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Mostre que

$$\int_0^1 F(x)\,dx = F(1)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2e}.$$

(Sugestão: use integração por partes.)

17. Calcule o valor dos integrais seguintes, utilizando as substituições indicadas:

a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{(e^x-3)\sqrt{1+e^x}}\,dx,\quad t^2=1+e^x,$

b) $\displaystyle\int_0^{1/2}\sqrt{1-4x^2}\,dx,\ x=\frac{1}{2}\operatorname{sen}t$

c) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{8}{\operatorname{tg}x(1+\operatorname{sen}^2 x)}\,dx,\quad t=\operatorname{sen}x,$

d) $\displaystyle\int_{\operatorname{argsh}(-1)}^{0}\frac{1}{\operatorname{ch}x}\,,\ t=\operatorname{sh}(x),$

e) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,\ x=\operatorname{tg}t,$

f) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\ x=\sec t.$