

FICHA 10

Primitivas por partes. Primitivas de funções racionais. Primitivas por substituição.

AULA PRÁTICA

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

- | | | |
|-----------------|--|---|
| a) $\cos^2 x$, | c) $\cos^3 x \sin^2 x$, | e) $3 \operatorname{ch}^3 x$, |
| b) $\sin^3 x$, | d) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x$, | f) $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{sec}^2 x$, |

2. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

- | | | |
|--------------------------------|--|--|
| a) $x^3 e^{-x}$, | d) $x \operatorname{arctg} x$, | g) $\operatorname{ch} x \cos x$, |
| b) $\operatorname{arcsen} x$, | e) $\ln^2 x$, | h) $\sqrt{x} \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$, |
| c) $\sqrt{x} \ln x$, | f) $\cos(2x) \ln(\operatorname{tg} x)$, | i) $\cos(\ln x)$, |

3. Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\forall_{x > -1} \psi''(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

4. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| a) $\frac{x}{1+(x-1)^2}$, | b) $\frac{1}{x^2+2x+2}$, | c) $\frac{x+1}{(x+2)^3}$. |
|----------------------------|---------------------------|----------------------------|

5. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utilizando uma decomposição em fracções simples adequada:

- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}$, | c) $\frac{3x^2+2}{x(x^2+2x+2)}$, | e) $\frac{x+2}{(4-x^2)(1+x^2)}$, |
| b) $\frac{x^4}{x^4-1}$, | d) $\frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$, | f) $\frac{1+x^2}{x^3-2x^2+x}$. |

6. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

7. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

- | | | | |
|---|--------------------------------|--|--|
| a) $\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, | b) $\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, | c) $\frac{2 \ln x - 1}{x \ln x (\ln x - 1)^2}$, | d) $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$. |
|---|--------------------------------|--|--|

8. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\frac{1}{x\sqrt{1+2x}}, 1+2x=t^2$	b) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}, x=t^6$
c) $\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}, t=e^x$	d) $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}, t^2=1+e^x$
e) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}, x=\cos t,$	f) $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, x=\sin^2 t,$
g) $\frac{1}{2+\operatorname{tg} x}, t=\operatorname{tg} x,$	h) $\frac{1}{\sin^2 x \cos x}, t=\sin x.$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sin^3 x \cos^4 x,$	c) $4 \cos^2 x \sin^2 x,$	e) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x,$
b) $\cos^3 x \sin^3 x,$	d) $\operatorname{ch}^2 x,$	f) $\sec^4 x.$

2. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $e^x(e^x + x),$	h) $\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right),$	m) $3x\sqrt{1-x^2} \arcsen x,$
b) $x \operatorname{sen} x,$	i) $x^2 \ln^2 x,$	n) $\frac{\ln x}{(1+x)^2},$
c) $e^x \operatorname{sen} x,$	j) $\ln^3 x,$	o) $3^x \cos x,$
d) $x^3 e^{x^2},$	k) $\frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x},$	p) $\sqrt{x} \operatorname{arctg}(1/\sqrt{x}),$
e) $x^2 \operatorname{sh} x,$	l) $\operatorname{sen} x \ln(1 + \operatorname{sen} x),$	q) $x^n \ln x, n \in \mathbb{N},$
f) $\operatorname{arctg} x,$		
g) $x(1+x^2) \operatorname{arctg} x,$		

3. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}$, é válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$P(\ln^n |x|) = x \ln^n |x| - nP(\ln^{n-1} |x|), \quad x \neq 0.$$

Aproveite o resultado anterior para calcular todas as funções $F(x)$ tais que $F'(x) = \ln^2 |x|$, e que verificam a condição $F(1) + F(-1) = 0$.

4. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

a) $\frac{1}{1-x},$	c) $\frac{x+1}{x^2+1},$	e) $\frac{x+1}{a^2+x^2},$
b) $\frac{1}{(x-3)^3},$	d) $\frac{2x+1}{x^2+4},$	f) $\frac{1}{x^2+x+1}.$

5. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utilizando uma decomposição em frações simples adequada:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \frac{1}{x^2 + x}, & \text{f)} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x}{(x + 1)^2}, & \text{j)} \frac{2x}{(x^2 - 1)(x + 1)}, \\
 \text{b)} \frac{x + 1}{x(x - 1)^2}, & \text{g)} \frac{x^4}{x^4 - 1}, & \text{k)} \frac{x^2 + 3x - 2}{(x + 1)^2(x - 3)}, \\
 \text{c)} \frac{x^2 + x - 4}{x(x^2 + 4)}, & \text{h)} \frac{x^3 + 4x^2 - 4x}{x^4 - 16}, & \text{l)} \frac{2x^2 + 4x + 3}{(1 + x)(x^2 + 2x + 2)}, \\
 \text{d)} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)}, & \text{i)} \frac{2x^2 + x - 5}{(x + 1)^2(x - 3)}, & \text{m)} \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \\
 \text{e)} \frac{x^5}{x^2 - 1}, & &
 \end{array}$$

6. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

7. Determine

- a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em \mathbb{R} por

$$f(x) = (x + 1)e^{x^2 + 2x}.$$

- b) A primitiva G , da função

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^4 - x^2}$$

definida no intervalo $]1, +\infty[$ e que verifica a condição $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 3$.

8. a) Usando o método de primitivação por partes, mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tem-se:

$$P\left(\frac{x^2}{(1 + x^2)^k}\right) = \frac{1}{2(1 - k)} \left(\frac{x}{(1 + x^2)^{k-1}} - P\left(\frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}}\right) \right).$$

- b) Justifique que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

$$P\left(\frac{1}{(1 + x^2)^k}\right) = -\frac{1}{2(1 - k)} \frac{x}{(1 + x^2)^{k-1}} + \left(1 + \frac{1}{2(1 - k)}\right) P\left(\frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}}\right).$$

(Sugestão: $\frac{1}{(1 + x^2)^k} = \frac{1}{(1 + x^2)^{k-1}} - \frac{x^2}{(1 + x^2)^k}$).

- c) Utilize a alínea anterior para calcular

$$P\left(\frac{1}{(1 + x^2)^2}\right), \quad P\left(\frac{1}{(1 + x^2)^3}\right).$$

9. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x^4})} & \text{c)} \frac{1}{1 + e^{2x}}, & \text{e)} \frac{\ln x}{x(\ln x - 1)^2}, \\ \text{b)} \frac{\sqrt{x-1}}{x}, & \text{d)} \frac{e^{3x}}{(1 + e^{2x})(e^x - 1)^2}, & \end{array}$$

10. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{5}{2(x+1)(\sqrt{x+2})}, x = t^2 & \text{b)} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}, 1-x = t^2 \\ \text{c)} \frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}, 1+x = t^4 & \text{d)} \frac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}}, t = \sqrt{1-e^x} \\ \text{e)} \frac{1}{x(4 - \ln^2(x))}, t = \ln x & \text{f)} \frac{1}{x \ln x(1 - \ln x)}, t = \ln x \\ \text{g)} \sec x, t = \sen x, & \text{h)} \sec^3 x, t = \sen x, \\ \text{i)} \frac{\cos x}{1 + \sen x - \cos^2 x}, t = \sen x, & \text{j)} \frac{\sen x}{\sen^2(x) + 3(\cos x - 1)}, t = \cos x \\ \text{k)} \frac{1}{\sen x(1 + \cos x)}, t = \cos(x) & \text{l)} \frac{1}{\cos x(1 - \sen x)}, t = \sen(x) \end{array}$$

11. a) Mostre que fazendo a substituição $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $x \in]-\pi, \pi[$, temos

$$\cos x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \sen x = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

b) Justifique que esta substituição transforma qualquer função racional de $\sen x$ e $\cos x$ numa função racional de t e aproveite para calcular uma primitiva das funções seguintes:

$$\frac{1}{1 + \sen x + \cos x}, \quad \frac{\sen x}{1 - \sen x}.$$