Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

FICHA 9

Polinómio de Taylor. Primitivas imediatas e quase-imediatas.

AULA PRÁTICA

1. Determine o polinómio de Taylor de grau 2 em $a = 0$ e $a = 1$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) - x + 1$ e justifique se a função tem um extremo local em algum destes pontos.

2. Seja f uma função de classe $C^4(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio de Taylor de grau 4 em a é dado por:

   a) $p_{4,0}(x) = -1 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$, $a = 0$,

   b) $p_{4,1}(x) = -2 + 2x - x^2$, $a = 1$.

   Em cada caso, determine $f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e decida se f tem um ponto de extremo local em a, classificando-o.

3. Use o polinómio de Taylor para escrever o polinómio $p(x) = x^2 - 4x - 9$ como um polinómio em potências de $(x - 3)$.

4. Use a recta tangente para estimar aproximadamente a expressão $\sqrt{99,7}$. Estime o erro cometido e indique se a aproximação é por excesso ou por defeito.

5. Prove, usando a fórmula de Taylor em $a = 0$ com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| \operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \leq 0.01, \quad \text{para } x \in [0, 1].$$

   (Sug.: considere o polinómio de Taylor de grau 4.)

6. Determine $e^{0.1}$ com erro inferior a 10^{-4}, sem usar a calculadora.

7. Determine uma primitiva (imediata) de cada uma das funções:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$,

   b) $\sqrt[3]{1-x}$,

   c) $\dfrac{3}{x+3}$,

   d) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$,

   e) $e^{2x} + 2^{3x}$,

   f) $\operatorname{sh}(x/4)$

   g) $\operatorname{sen}(2x)$,

   h) $\dfrac{2}{4+x^2}$,

   i) $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$,

8. Determine uma primitiva de cada uma das funções (escrevendo-as na forma $f(u(x))u'(x)$):

   a) $\dfrac{x^3}{3+x^4}$,

   b) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$,

   c) $e^x \operatorname{sen}(e^x)$,

   d) $x(x^2-1)^5$,

   e) $\operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh} x}$,

   f) $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$,

   g) $\operatorname{tg} x$,

   h) $\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}^2 x}$,

   i) $\cos x \operatorname{sen}^4 x$,

   j) $\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$,

   k) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,

   l) $\dfrac{3 \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$,

   m) $\dfrac{1}{x \ln x}$,

   n) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}$,

   o) $\dfrac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

9. Determine as funções que verificam as condições impostas em cada uma das alíneas seguintes:

   a) $f'(x) = \dfrac{1}{4+9x^2}, \; x \in \mathbb{R}; \quad f(0) = 1.$

   b) $g'(x) = \dfrac{1}{x-1}, \; x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; \quad g(0) = 0, \; g(2) = 3.$

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. a) Determine o polinómio de Taylor de grau 3 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

   b) Determine o polinómio de Taylor de grau 5 em $a = 0$ da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\cos x}$.

2. Use o polinómio de Taylor para escrever cada um dos seguintes polinómios como um polinómio em potências de $(x-3)$.

   a) $x^3 - 3x,$ b) $x^4.$

3. Seja f uma função de classe $C^n(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio de Taylor de grau n em a é dado por $p_{n,a}$. Em cada um dos casos, determine $f^{(k)}(a)$, para $k = 0, 1, \ldots, n$, e indique justificando se f tem ou não um extremo local no ponto a:

   a) $p_{4,0}(x) = 1 + x^4, \; (n = 4, a = 0),$

   b) $p_{4,-1}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + x^3, \; (n = 4, a = -1),$

   c) $p_{5,0}(x) = x^3 - x^5\,, \; (n = 5, a = 0)$

   d) $p_{5,1}(x) = \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{x^2}{2}\right), \; (n = 5, a = 1).$

4. Verifique que a função $f(x) = \dfrac{x}{2} \operatorname{sen} x + \cos x$ tem um ponto crítico na origem e classifique-o. Escreva o polinómio de Taylor de grau 4 de f em $a = 0$.

5. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x) = f(e^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto 1 é $3 - x + 2(x-1)^2$, determine o polinómio de Taylor de ordem 2 em $a = 0$ de g.

6. a) Determine a fórmula de Taylor de ordem 2, com resto de Lagrange, relativa ao pontos $a = 0$ e $a = 1$, das funções seguintes:

   $$e^{2x}, \qquad \ln(1+x), \qquad \cos(\pi x), \qquad \sqrt{x+1},$$

   b) Para $a = 0$, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de Taylor obtido no intervalo $]0, 1/2[$.

7. Prove, usando a fórmula de Taylor em $a = 0$ com resto de Lagrange, que se tem
$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6}, \quad \text{para } x \in [0,1].$$

8. Prove, recorrendo à fórmula de Taylor, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição
$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}$$
então f é um polinómio em x de grau menor do que n.

9. Determine uma primitiva (imediata) de cada uma das funções:

a) $2x^2 + 3x^3$,
b) $(x^2+1)^3$,
c) $\dfrac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$,
d) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$,
e) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$,
f) e^{x+3},
g) 2^{x-1},
h) e^{1-x},
i) $\dfrac{1}{2x+1}$,
j) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$,
k) $\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x}$,
l) $\dfrac{4}{1+4x^2}$,
m) $\operatorname{tg}^2 x$.

10. Determine uma primitiva de cada uma das funções (escrevendo-as na forma $f(u(x))u'(x)$):

a) $\dfrac{e^x}{1+2e^x}$,
b) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$
c) $\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$,
d) $e^x e^{e^x}$,
e) $\dfrac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$,
f) $x\cos(x^2+2)$,
g) $x^2\sqrt[3]{1+x^3}$,
h) $2x\sqrt[5]{x^2-1}$,
i) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$,
j) $\dfrac{x^3}{(1+x^4)^2}$,
k) $\cos x\sqrt{\operatorname{sen} x}$,
l) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$,
m) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{2+\operatorname{ch} x}$,
n) $\dfrac{x}{(1+x^2)^\alpha}$.

11. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{\dfrac{x}{2}}$,
b) $3\operatorname{sen} x + 2x^2$,
c) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$,
d) xe^{-x^2},
e) $x\sqrt{1+x^2}$,
f) $e^{2\operatorname{sen} x}\cos x$,
g) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$,
h) $\dfrac{x}{1+x^2}$,
i) $\dfrac{1}{2+x^2}$,
j) $\dfrac{x^3}{x^8+1}$,
k) $\dfrac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$,
l) $\dfrac{x}{1+x^4}$,
m) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$,
n) $\operatorname{cotg} x$,
o) $3^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen} 2x$,
p) $\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,
q) $\dfrac{1}{1+3x^2}$,
r) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$,
s) $\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$,
t) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$,
u) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.

12. Para cada uma das funções definidas pelas expressões
$$x\operatorname{sen}(x^2), \qquad \frac{e^x}{2+e^x}, \qquad \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}$$
determine se possível:

a) uma primitiva que se anule no ponto $x = 0$;

b) uma primitiva que tenda para 0 quando $x \to +\infty$.

13. Determine uma função F definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ que obedece às seguintes condições:

$$F'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \qquad F(2) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 10.$$