

FICHA 8

Estudo de funções; esboço de gráficos.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.
- Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b .
- Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.
- Estude f quanto a monotonia e extremos.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e determine o contradomínio de f .

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f' .
- Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
- Determine, justificando, o contradomínio de f .

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

- Determine e classifique os extremos locais da função φ .
- O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

4. Determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões, assíntotas e contradomínio e esboce o gráfico das funções, definidas nos respectivos domínios por:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x + \frac{1}{x^2} & \text{c) } f(x) = \frac{|x|}{1 - |x|} & \text{e) } f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\ \text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} & \text{d) } f(x) = x^2 e^{-x} & \end{array}$$

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & , x \geq 0 \\ x e^{1/x} & , x < 0 . \end{cases}$$

- Mostre que f é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$.
- Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f .
- Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Considere a função $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{1-x^2} & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- Determine $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Estude f quanto à diferenciabilidade e calcule f' nos pontos onde existir.
 - Estude f quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.
 - Determine o contradomínio de f .
 - Mostre que não existe $f''(0)$ e que f'' muda de sinal em 0.
2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|.$$

- Calcule ou mostre que não existem: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f' .
 - Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
 - Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $] -\infty, 0]$.
3. Mostre que a função $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ admite assíntotas à direita e à esquerda e determine as suas equações. Estude f quanto à monotonia e extremos e esboce o gráfico da função.
4. Faça o estudo da função $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{2} + \ln(x+1) - \ln(x-1), \quad \forall x > 1.$$

tendo em conta monotonia, extremos, concavidades e pontos de inflexão, assíntotas e contradomínio. Esboce o gráfico da função.

5. Determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões, assíntotas e contradomínio e esboce o gráfico das funções, definidas nos respectivos domínios por:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)} & \text{c) } f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+2} & \text{e) } f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x-1} \right) \\ \text{b) } f(x) = x e^{1/x} & \text{d) } f(x) = \frac{x}{1 + \ln x} & \end{array}$$

6. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no ponto 0, e tal que

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x^2} \right), \quad x \neq 0.$$

- Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

- b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.
- c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f .
- d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.
7. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+x}{|x|} \right)$, $x \neq 0$, e $f(0) = \frac{\pi}{2}$.
- a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.
- b) Determine, justificando, os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.
- c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f .
- d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.
8. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{1+x} \right) & , x \geq 0 \\ x^2 e^x & , x < 0 . \end{cases}$$

- a) Mostre que f é contínua mas não diferenciável no ponto zero.
- b) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assíntotas da função f .
- c) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.