Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

FICHA 7

Derivada da função Inversa. Teoremas de Rolle e Lagrange. Regra de Cauchy.

AULA PRÁTICA

1. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista[16]:

   a) $(e^{2x} + \operatorname{arcsen}(2x))^8$,

   b) $\operatorname{arctg}(x^4) - (\operatorname{arctg} x)^4$,

   c) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$,

   d) $\ln\left(\arccos\left(1/\sqrt{x}\right)\right)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função injectiva, diferenciável, com $g(1) = 4$, $g'(1) = 3$. Considere $h(x) = f(g(x))$.

   a) Justifique que h é diferenciável em 1 e calcule $h'(1)$.

   b) Justifique que h é injectiva e que a sua função inversa h^{-1} é diferenciável em $\ln 3 = h(1)$. Calcule $(h^{-1})'(\ln 3)$.

3. Mostre que o polinómio $p(x) = x^6 - 4x^4 + 2$ tem exactamente quatro zeros.

4. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

5. Use o Teorema de Lagrange num intervalo adequado para provar a seguinte relação:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x, \qquad \text{para } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

6. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções[17]:

   a) $|x^2 - 5x + 6|$,

   b) $\dfrac{e^x}{x}$,

   c) $\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

   a) Prove que se $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então não existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

   b) Assuma agora que $f(n) = (-1)^n/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$. O que pode dizer sobre o seu valor?

8. a) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$ então $L = 0$.

   b) Seja $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que h tem uma assíntota à direita em $y = mx + b$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = L$ então $L = m$.

9. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

---

[16] assuma que x é um ponto interior do domínio.

[17] definidas no maior conjunto em que a expressão dada designa um número real.

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x}$,

b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x})}{x}$,

c) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$,

d) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$,

e) $\lim_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(\ln x)$,

f) $\lim_{x\to +\infty} \ln x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$,

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,

h) $\lim_{x\to 0^+} x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$,

i) $\lim_{x\to 1} \ln(x)\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\right)$,

j) $\lim_{x\to +\infty} x\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$,

k) $\lim_{x\to -\infty} x \operatorname{arcsen} \dfrac{1}{x}$,

10. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(x)\right)^{1/x}$,

c) $\lim_{x\to 0^-} (1-e^x)^x$,

d) $\lim_{x\to +\infty} (2+x^3)^{1/\ln x}$,

e) $\lim_{x\to +\infty} (\operatorname{sen}(1/x))^{1/x}$,

f) $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} - 1$,

11. Calcule $\lim \sqrt[n]{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$ (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$.).

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista:

   a) $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$,

   b) $\arccos\dfrac{1}{x}$,

   c) $(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}$.

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

3. Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente monótona, com $g(0)=2$ e $g'(0)=\frac{1}{2}$. Considere $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=g(\operatorname{arcsen} x)$.

   a) Justifique que f é diferenciável em $]-1,1[$ e calcule $f'(0)$.

   b) Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a sua inversa, calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

4. As funções inversas das funções hiperbólicas sh e ch designam-se, respectivamente por $\operatorname{argsh}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $\operatorname{argch}:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$. [18] Mostre que

$$(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad (\operatorname{argch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

   de duas formas distintas:

   a) usando o teorema de derivação da função inversa;

   b) derivando as expressões obtidas para $\operatorname{argsh} x$ e $\operatorname{argsh} x$ na Ficha 5.

   (Para a), veja que $\operatorname{ch}^2(y) - \operatorname{sh}^2(y) = 1 \Rightarrow \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+x^2}$ e $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1}$.)

[18] Ou seja, $x=\operatorname{sh} y$ sse $y=\operatorname{argsh} x$, $y\in\mathbb{R}$, e $x=\operatorname{ch} y$ sse $y=\operatorname{argch} x$, $y\geq 1$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$, mas a derivada de f não se anula em $[-1, 1]$. Justique que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

6. Mostre que a equação $3x^2 = e^x$ tem exactamente três soluções.

7. Prove que se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.

8. Use o Teorema de Lagrange em intervalos adequados para provar as seguintes relações:

   a) $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x - 1$, para $x > 1$.

   b) $e^x \geq 1 + x$, para $x \in \mathbb{R}$.

9. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções[19]:

   a) $\dfrac{x}{x^2+1}$, b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, c) $x \ln x$, d) e^{-x^2}, e) xe^{-x}.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

    a) Mostre que $\lim_{x\to+\infty}[f(x+2) - f(x)] = 0$.

    b) Será que se pode garantir que $\lim_{x\to+\infty}[f(2x) - f(x)] = 0$? Justifique.

*11. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

é crescente em $\mathbb{R}^+$. (Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

12. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos x - 1}{x}$,

    b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2^x)}{x}$,

    c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arcsen}(x^2)}{x^2}$,

    d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}$,

    e) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

    f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

    g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2 \ln x}$,

    h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{x^2 \ln(1-x)}$,

    i) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln x \cdot \operatorname{sen}\sqrt{x}$,

    j) $\lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2(x+2)}$,

    k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$,

    l) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \ln(x)\ln(1-x)$,

    m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$,

    n) $\displaystyle\lim_{x\to0} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$,

    o) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arcsen}(2x) - 2\operatorname{arcsen}(x)}{x^3}$.

13. Prove por indução matemática que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, se tem:

[19] definidas no maior conjunto em que a expressão dada designa um número real.

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0$; b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^p}{x} = 0$; c) $\lim_{x\to 0^+} x\,(\ln x)^p = 0$.

14. Calcule cada um dos limites seguintes, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} (\ln x)^{x-1}$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{(e^x-1)}$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (3+x^2)^{1/\ln x}$,

k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^{x}$,

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1/x)^{\operatorname{sen} x}$,

m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\cos(1/x))^{x}$,

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1-\cos x)^{1/\ln x}$,

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$.