Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

FICHA 6

Teoremas do Valor Intermédio (Bolzano) e de Weierstrass. Diferenciabilidade. Teorema da derivada da função composta.

AULA PRÁTICA

1. Use o Teorema de Bolzano para mostrar que
   a) a equação $\operatorname{sen} x = x^2 - 1$ tem pelo menos duas soluções em $\mathbb{R}$.
   b) qualquer função polinomial de grau ímpar tem contradomínio $\mathbb{R}$. (Sug. calcule limites em $\pm\infty$).

2. Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0,1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0,1]$. Prove que f tem um *ponto fixo*, ou seja, que existe um ponto $c \in [0,1]$ com $f(c) = c$.

   (Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano a $h(x) = f(x) - x$.)

3. Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

4. a) Sendo $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função $\varphi(x) = g(1-x^2)$ tem máximo e mínimo.
   b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0,+\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existência de máximo e mínimo? Justifique.

5. Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se existe $b \in \mathbb{R}^+$ com $f(b) < f(x)$, para qualquer $x > b$, então f tem mínimo em $[0,+\infty[$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva (i.e. $f(x) > 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$), tal que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)\,.$$
   Prove que f tem máximo e que o contradomínio de f é da forma $]0, f(c)]$, para algum $c \in \mathbb{R}$.

7. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

   a) $x|x|$, b) $e^{x-|x|}$.

8. Calcule as constantes a e b por forma a que seja diferenciável em 0 a função f definida em $\mathbb{R}$ por
$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$
   Justifique a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}$, calcule a sua derivada, e determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em cada ponto $a \leq 0$.

9. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:
$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)$$

10. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista[14]:

a) $\ln(\operatorname{sen} x)$, c) $\operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)$, e) $\operatorname{ch}(\cos x)$,

b) $e^{\sqrt{x^2-1}}$, d) $(1+\operatorname{tg}\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}$, f) $(\operatorname{sen} x)^x$.

11. Determine a derivada g' em termos de f' se:

a) $g(x) = f[f(x)]$ b) $g(x) = f(\operatorname{sen}^2(x)) + f(\cos^2(x))$.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Use o Teorema de Bolzano para mostrar que:

a) a equação $e^x + \cos^3(\pi x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]1,-1[$;

b) a equação $\operatorname{sen} x - \cos x = \dfrac{1}{2}$ tem infinitas soluções em $\mathbb{R}$;

*2. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta\,,$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Prove que o contradomínio de f contém o intervalo $]\alpha, \beta[$.

3. Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty\,.$$

Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in]-1,1[$ com $f(c) = c$.

4. Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:

a) se existe $a \in \mathbb{R}^+$ com $f(a) > f(x)$, para qualquer $x > a$, então f tem máximo;

b) se existe, em $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, então f é limitada.

5. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:

a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.

b) f tem mínimo em $\mathbb{R}$.

6. Seja $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty = \lim_{x\to1^-} f(x)\,.$$

Prove que f tem mínimo no intervalo $]-1,1[$ e que o contradomínio de f é da forma $[f(c),+\infty[$, para algum $c \in]-1,1[$.

[14] Assuma que x é um ponto interior do domínio.

7. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista: [15]:

a) $\dfrac{1}{x-1}$,
b) $\dfrac{2x}{(x+1)^2}$,
c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$,
d) $x^{\frac{3}{2}}e^x$,
e) $x^2 2^x$,
f) $\operatorname{tg} x - x$,
g) $\dfrac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$,
h) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$,
i) $\dfrac{1}{1+\operatorname{cotg}(x)}$,
j) $x^2(1+\ln x)$,
k) $\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$.

8. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

a) $e^{-|x|}$,
b) $\ln|x|$,

9. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.
b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2}{\pi}$.
c) Justifique que f é diferenciável no ponto 0 e calcule $f'(0)$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

11. Determine a derivada das funções seguintes, sempre que exista:

a) $\sqrt[3]{1+x^3}$,
b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
c) $\ln(\ln x)$,
d) $\ln(1+e^{x^2})$,
e) $e^{\ln^2 x}$,
f) $x2^{x^2}$,
g) $\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$,
h) $\cos^2(\sqrt{x})$,
i) $\operatorname{tg}(e^{\operatorname{sen} x})$.
j) $\sqrt{1+\operatorname{sh}^4 x}$,
k) $(\ln x)^x$,
l) $x^{\operatorname{sen} 2x}$.

12. Determine a derivada g' em termos de f' se:

a) $g(x) = f(x^2)$
b) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$.

[15] Assuma que x é um ponto interior do domínio.