

- a) Determine K .
- b) Estude f do ponto de vista da continuidade.
- c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
- d) Quais são os limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, caso existam?
8. Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x+1|}.$$

Verifique que g é prolongável por continuidade ao ponto -1 . Sendo $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine o contradomínio de G .

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3 \cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ (k-x)(x+1), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- b) Determine a constante $k \in \mathbb{R}$ tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0 .
- c) Sendo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine justificando, o contradomínio de F .
10. Sendo $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$, convergente, tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
11. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = xd(x),$$

em que $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet (i.e, $d(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) é contínua em $x = 0$ e é descontínua em todos os outros pontos.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

- Mostre, recorrendo à definição de limite segundo Cauchy, que para as funções definidas em \mathbb{R} por $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = x^2 + 1$ se tem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.¹²
- Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ segundo Cauchy para mostrar que

¹²Ou seja, f e g são contínuas em qualquer $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty.$$

3. Calcule os seguintes limites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}, \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}, & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4}, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}, \end{array}$$

4. Calcule os limites quando $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow +\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}, & \text{c) } e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}, & \text{e) } \ln\left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right), \\ \text{b) } e^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}, & \text{d) } \ln\left(\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right), & \text{f) } \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right). \end{array}$$

5. Calcule os limites quando $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ das seguintes funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{a) } e^{1/x}, \quad \text{c) } \text{ch}(1/x), \quad \text{d) } e^{1/x^2}, \quad \text{e) } \text{sh}(1/x^2).$$

6. Calcule os limites quando $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ das funções definidas pelas seguintes expressões.

$$\text{a) } \cos\left(\frac{x-\pi}{x^2+2}\right), \quad \text{b) } \text{sen}\left(\frac{\pi x}{4x-1}\right), \quad \text{c) } \text{sen}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right), \quad \text{d) } \text{tg}\left(\frac{\pi x}{\sqrt{4x^2+1}}\right).$$

7. Determine, ou justifique que não existem, os limites quando $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ das funções definidas por:

$$\text{a) } \frac{\text{sen } x}{x}, \quad \text{b) } x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

8. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(2x+1)}, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}, \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(x-1) + \ln(x)}{x-1}, & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(x-1)^5} - 1}{(x-1)^7}, \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(\cotg x)}{\cos x}, \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \right], & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } 5x}{x \arccos x}, \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right), & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{x}} \text{sen} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \right). \end{array}$$

*9. Prove que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função periódica, não constante, de período $T > 0$, então não existem $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(Sug. considere $x, y \in \mathbb{R}$ com $f(x) \neq f(y)$ e sucessões $x_n = x + nT$ e $y_n = y + nT$.)

10. Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine o seu domínio e analise a sua continuidade:

a) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2 + x}$; b) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$; c) $\sqrt{\ln x}$.

11. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0, \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto ¹³.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.
- Indique, justificando, o contradomínio de φ .

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}((x-1)^2)}{k(x-1)^2} & \text{se } x < 1, \\ \frac{\ln x}{x^2 - 1} & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

em que $k \in \mathbb{R}$. Determine k por forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 1. Sendo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, indique $F(1)$.

13. Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \ln(\ln(1+x)), \quad g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

- Estude f e g quanto à continuidade.
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.
 - Indique, justificando, o contradomínio de f .
14. a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

¹³Por definição, uma função é contínua à esquerda (direita) num ponto a do seu domínio D , sse a sua restrição a $] -\infty, a] \cap D$ ($[a, +\infty[\cap D$) é contínua em a .

- b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ao ponto 0.
- c) Mostre que φ e ψ são funções limitadas.
- * 15. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x + |x|}{2} d(x)$, onde $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet ($d(x) = 1, x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
- a) Indique o contradomínio de f . A função é majorada? E minorada?
- b) Estude $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Em que pontos é f contínua?