Cálculo Diferencial e Integral I - 2º Sem. 2020/21

FICHA 4

Indeterminações. Escala de sucessões. Revisão: funções elementares em $\mathbb{R}$.

AULA PRÁTICA

1. Determine, se existir, o limite em $\overline{\mathbb{R}}$, de cada uma das sucessões que têm por termo geral:

   a) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

   b) $4^n - n! - n^4$

   c) $\dfrac{(2n)!}{n!}$

   d) $\dfrac{2^{2n}+2^{-n}}{\sqrt{n}+3^n}$

   e) $\dfrac{n^n}{n!+n^4+2}$

   f) $\dfrac{n^3+(-3)^n}{n^6+2}$

   g) $\dfrac{4^n+n^4}{(2n+1)^4+2^{2n+1}}$.

   h) $\dfrac{2n^2\cdot n!+n+1}{(n+2)!+n^2}$

   i) $\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

   a) $\lim \dfrac{(2n)!}{(2n)^n}$,

   b) $\lim \dfrac{2^n n!}{n^n}$,

   (Sugestão: para calcular $\lim u_n$, comece por estudar a convergência de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.)

3. Considere as funções

   $$f(x)=\sqrt{x}\,,\quad g(x)=\sqrt[3]{x}\,,\quad p(x)=x^2\,,\quad q(x)=2x+1\,.$$

   Escreva cada uma das seguintes funções como composição de f, g, p e q:

   a) $\sqrt[3]{x^2}$,

   b) $\sqrt{2x+1}$,

   c) $\sqrt[6]{x}$,

   d) $2x^2+1$,

   e) $\sqrt[4]{x}$,

   f) $2\sqrt[3]{x}+1$,

   g) $\sqrt{2\sqrt{x}+1}$,

   h) $|x|$,

   i) $(2\sqrt[3]{x}+1)^2$.

4. Determine o domínio[8] das funções definidas pelas seguintes expressões:

   a) $f(x)=\sqrt[4]{1+\sqrt{x+1}}$,

   b) $f(x)=\ln(\ln x)$,

   c) $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x$,

   d) $f(x)=\operatorname{arcsen}(e^x)$,

   e) $f(x)=\sqrt{3\operatorname{arctg}(2x)-\pi}$.

5. Identifique: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$, $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3}))$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(3\pi/4))$.

6. Exprima as soluções da equação $\operatorname{sen} x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\arccos a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.

---

[8] definido aqui como o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão que define f faz sentido, ou seja, designa um número real.

7. Deduza as seguintes identidades, para $x \in [-1, 1]$,

   a) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, b) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para $x \neq 0$.

8. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

   Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para as funções trigonométricas):

   a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, b) $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

9. Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, então $(\operatorname{arctg} u_n)$ é uma sucessão convergente (em $\mathbb{R}$).

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

   a) $\sqrt[3]{1 - n} \to -\infty$, b) $\sqrt[4]{4 + n^2} \to +\infty$, c) $\dfrac{n^2 + 1}{n} \to +\infty$.

2. Determine, se existir, o limite em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite da cada uma das sucessões que têm por termo geral:

   a) $n - \dfrac{n^3 + 2}{n^2 + 3n}$

   b) $n^{n+1} - n^n$

   c) $3^n - (2n)!$

   d) $\dfrac{n^{1000}}{1.0001^n}$

   e) $\dfrac{n!}{n^{1000}}$

   f) $\dfrac{n^n}{1000^n + n^{1000}}$

   g) $\dfrac{4^n + n^4}{2^n + n!}$

   h) $\dfrac{(2n)! + 2}{(3n)! + 3}$

   i) $(n! - n^{1000})^n$

   j) $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$

   k) $\dfrac{2^{(n^2)}}{15^n}$.

   l) $\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$

   m) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

   n) $\left(-1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

3. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

   a) $\lim \dfrac{(n!)^2}{(2n)! + 2}$, b) $\lim \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

   (Sugestão: para calcular $\lim u_n$, comece por estudar a convergência de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.)

4. Determine se as seguintes funções são limitadas/majoradas/minoradas, e monótonas (crescentes ou decrescentes), indicando, se for o caso, se são pares ou ímpares nos domínios dados, e esboce os seus gráficos:

a) $\dfrac{1}{x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,,$

b) $\dfrac{1}{1+|x|} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$

c) $2^{-x} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,,$

d) $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ a > 0\,,$

e) $\sqrt[3]{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$

5. Determine o domínio[9] das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

b) $f(x) = \ln(1 - x^{\frac{3}{2}})$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$.

d) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,

e) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,

f) $f(x) = \ln(1 - \arccos x)$,

6. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios e contradomínios:

a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

c) $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)$, $x \in \left]1 + \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{3\pi}{2}\right[$.

d) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

7. Identifique: $\arccos 0$, $\arccos 1$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{arctg} 1$, $\arccos(\cos((-\frac{\pi}{6}))$.

8. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações seguintes

a) $\arccos(3x+1) = \dfrac{2\pi}{3}$,

b) $1 - \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg}(x^2 - 1) = \dfrac{1}{2}$,

c) $\dfrac{\pi}{\operatorname{arcsen}(x^2 + \frac{1}{4})} = 6.$

9. Deduza as seguintes identidades:

a) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$,

b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,

10. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma seguinte:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

As funções inversas de sh em $\mathbb{R}$, e ch restrito a $\mathbb{R}_0^+$, designam-se, respectivamente por $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$. Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,, \qquad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})\,.$$

[9] definido aqui como o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão que define f faz sentido.