

FICHA 3

Sucessões: limite; sucessões por recorrência. Limite por enquadramento. Subsucessões.

AULA PRÁTICA

1. Considere as sucessões reais (u_n) e (v_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = 2\sqrt{2}, \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n^2 + 2}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

a) $u_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$; b) $v_n = \sqrt{3^{n+1}} - 1$.

2. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

a) $\frac{2n-1}{n+1} \rightarrow 2$. b) $1 + (-1)^n \not\rightarrow 0$.

3. Indique, justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n = \frac{a^n}{2^{1+2n}}$ é

- a) convergente;
b) divergente, mas limitada.

4. Calcule o limite em \mathbb{R} , ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

a) $\frac{(n+1)^2 + 2n^4}{(n+1)^4 + 2n^2}$, c) $\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$, e) $\frac{1+2^{-n}+3^{-n}}{2+3^{-n}+4^{-n}}$
 b) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$, d) $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$, f) $\frac{(-2)^n}{1+3^n}$,

5. Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n \cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

6. Calcule o limite em \mathbb{R} , ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

a) $\frac{1}{(-1)^n n^2 + 2}$ c) $\frac{(-1)^n}{n^{1+(-1)^n}}$ e) $\frac{n^2 + \cos(n^2 + \sqrt{n})}{(2n+1)^2}$
 b) $\frac{n(1+(-1)^n)}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{(-1)^n n^2 + 2}}{n+3}$ f) $\frac{\text{sen}(n!)}{(2n)!}$.

7. Considere $A = [-1 + \sqrt{2}, 3]$. Indique, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

- (i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente.
- (ii) Toda a sucessão (a_n) estritamente crescente de termos em A é tal que $\lim a_n = 3$.
- (iii) Existem sucessões (a_n) de termos em $\mathbb{R} \setminus A$ convergentes e tais que $a_{n+1}a_n < 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

8. Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, então u_n é convergente.

9. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3} \end{cases} .$$

- a) Mostre usando indução que $1 < u_n < 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
- b) Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.
- c) Justifique que (u_n) é convergente e determine $\lim u_n$.

10. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 2$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

- a) Prove por indução que $1 < u_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
- b) Prove por indução que (u_n) é decrescente.
- c) Justifique que (u_n) é convergente e determine o limite de (u_n) .

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Indique quais são limitadas/majoradas/minoradas e monótonas (crescentes ou decrescentes) de entre as sucessões definidas do modo seguinte, $n \in \mathbb{N}$:

a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + 1}$.

c) $u_n = (-1)^n n^2$.

d) $u_n = n^{(-1)^n}$.

b) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$.

e) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.⁶

2. Considere as sucessões reais (u_n) e (w_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 4, \\ u_{n+1} = -2u_n, \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = \sqrt[3]{5}, \\ w_{n+1} = \sqrt[3]{4w_n^3 - 3}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

⁶Pode ser útil usar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica (ver Ex. 4 - Ficha 2).

a) $u_n = (-2)^{n+1}$; b) $w_n = \sqrt[3]{2^{2n} + 1}$.

3. Para cada $\varepsilon > 0$, determine os valores de $n \in \mathbb{N}$ tais que $|u_n - a| < \varepsilon$ e decida se $u_n \rightarrow a$ em cada um dos seguintes casos:

a) $u_n = \frac{2n}{n+1}$, $a = 2$; c) $u_n = \begin{cases} \frac{2n}{n+1}, & \text{se } n \leq 1000, \\ 3, & \text{se } n > 1000, \end{cases}$ $a = 2$.

b) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$, $a = -1$;

4. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$. b) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \rightarrow 1$.

5. Calcule o limite em \mathbb{R} , ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

a) $\frac{1}{n} \left(2 + \frac{1}{n}\right)$, d) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$, g) $\frac{4^n}{1+4^{n^2}}$,

b) $\frac{1}{n} (2n + \sqrt{n})$, e) $\frac{n+1}{n!}$, h) $\frac{(-1)^n}{a^n}$, com $a > 1$,

c) $\frac{(2n+1)^3 + n}{n^3 + 1}$ f) $\frac{n^n}{n^n + 1}$, i) $\frac{(a^n)^2}{a^{n^2}}$, com $a > 1$.

6. Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n + 1}, \quad w_n = u_n v_n$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

7. Calcule o limite em \mathbb{R} , ou justifique a sua não existência, para cada uma das sucessões de termo geral

a) $(1 + (-1)^n) \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ c) $\frac{(-1)^n}{n!}$ e) $\frac{n^2 \cos(n\pi)}{2n^2 + n + 1}$

b) $\frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 - 1}$ d) $\frac{n^3 + \cos(n! + 1)}{(2n-1)^3}$ f) $\frac{\sqrt[4]{4n^4 + 1}}{n+2} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{4}\right)$

8. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0, 1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[$ então $\lim u_n \in \{0, 1\}$.

9. Dê exemplos de sucessões (u_n) tais que:

a) (u_n) tem termos em $] -\infty, 1[$ e é crescente.⁷

⁷Recorde que u_n tem (todos os) termos em A se e só se $u_n \in A$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- b) (u_n) não é monótona e é convergente.
- c) (u_n) é divergente e $(|u_n|)$ é convergente.
- d) (u_n) é limitada e divergente.
- e) (u_n) tem termos em $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e é divergente.
- f) (u_n) tem termos em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e converge para um elemento de \mathbb{Q} .

10. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

- a) Mostre que $u_n \in \mathbb{Q}^+$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (Sug. Use indução).
- b) Assumindo que (u_n) é convergente, mostre que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

11. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{4} \end{cases} .$$

- a) Mostre usando indução que $u_n < \frac{3}{2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
- b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.
- c) Mostre que (u_n) é convergente e determine $\lim u_n$.

12. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} - \frac{1}{n} \end{cases} .$$

- a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
- b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.
- c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

* 13. Sendo (x_n) o termo geral de uma sucessão monótona, (y_n) o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que (x_n) é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.