Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

FICHA 2

Método de Indução Matemática. Somatórios. Axioma do Supremo.

AULA PRÁTICA

1. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. [1]

   b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   c) $2^{2n} + 2$ é divisível por 3, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

2. Seja $P(n)$ a condição "$n^2 + 3n + 1$ é par", $n \in \mathbb{N}$.

   a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   b) Pode concluir que $n^2 + 3n + 1$ é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

   c) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n + 1$ é ímpar.

3. Mostre[2] que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

   pelos seguintes dois métodos distintos:

   a) usando indução matemática.

   b) aplicando as propriedades do somatório a $(1-r)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k$.

4. Use indução matemática para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}$.

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)3^{k-1}}{(k+1)!} = 1 - \frac{3^n}{(n+1)!}$.

5. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $3^n \geq 2n + 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   b) $n! \leq n^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.

---

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma de somatório como $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

[2] Esta é a vossa conhecida *fórmula da soma dos termos de uma progressã o geométrica de razão* r.

6. Prove por indução matemática que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

(Sugestão: use a Desigualdade Triangular $|a+b| \leq |a| + |b|$.)

7. Para cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, os respectivos supremo, infimo, máximo e mínimo:

a) $A = \{-2\} \cup\ [0, 1[$;
b) $B = [3, +\infty[$
c) $C =]-\infty, \sqrt{2}]$
d) $D = \{1 + 2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$
e) $A \cup D$
f) $B \setminus \mathbb{Q}$
g) $C \cap \mathbb{Q}$
h) $(A \cup B) \setminus \mathbb{Q}$.

8. Considere os conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \ :\ \frac{1}{\ln x} \geq 1\right\}, \qquad B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \ :\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

9. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} \ :\ n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.
b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

10. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$.
b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \ \wedge\ \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
b) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

d) $n! \geq 2^{n-1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

e) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.

*f) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

g) $7^n + 2$ é divisível por 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Demonstre a *desigualdade de Bernoulli*: dado $a > -1$ tem-se, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

3. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

a) usando indução matemática.

b) observando que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e usando as propriedades do somatório.

4. Use indução matemática para mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(3k-1) = n^2(n+1)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k+2) = \frac{(n-1)n(n+4)}{3}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-2)^2}{2^k} = 2 - \frac{n^2+2}{2^n}$.

5. Demonstre por indução as seguintes propriedades do somatório:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescópica).

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{p+n} a_{k-p}$ para qualquer $p \in \mathbb{N}$.

6. Utilizando os resultados do Exercício 1 (Aula Prática e Suplementares) e as propriedades anteriores do somatório, calcule as somas seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{18} (k+1)$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} (2k-1)^2$; c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} (k-3)^3$;

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$; e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\left(3^k-3^{k+2}\right)$.

7. Dados inteiros $0 \le k \le n$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ (às vezes também representado por C_k^n) é definido por
$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

   a) Mostre que:
$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k},\quad 1\le k\le n.$$ [3]

   * b) Prove por indução matemática a *fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton*:
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\,,\ \text{para quaisquer } a,b\in\mathbb{R} \text{ e } n\in\mathbb{N}_0\,.$$

   c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0\,,\ \text{para qualquer } n\in\mathbb{N}_0\,.$$

8. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:|x|\ge\frac{x}{2}+2\right\},\qquad B=[-3,4],\qquad C=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A\cap B=\left[-3,-\frac{4}{3}\right]\cup\{4\}$.

   b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A\cap B)$, $\text{máx}(A\cap B)$, $\inf(A\cap B\cap C)$, $\sup(A\cap B\cap C)$ e $\min(A\cap B\cap C)$.

9. Considere os conjuntos A e B definidos por
$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,\frac{x-1}{x\ln x}>0\right\},\qquad B=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,x=-\frac{1}{n}\,,n\in\mathbb{N}\right\}.$$
Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A\cup B$.

10. Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por
$$A=\{x\in\mathbb{R}:|x-1|\le x^2-1\},\qquad B=[-2,2].$$

   a) Determine A sob a forma de reunião de intervalos.

   b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A\cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $(A\cap B)\setminus\mathbb{Q}$.

[3] Esta fórmula é a chamada *lei do triângulo de Pascal*, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

11. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right]$.
   b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

12. Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique as afirmações seguintes:

   a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.
   b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

13. Para $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, definimos $-A = \{-x : x \in A\}$. Justifique que A é minorado se e só se $-A$ é majorado e nesse caso temos $\inf A = -\sup(-A)$.

14. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto majorado e $s = \sup A$. Mostre que se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(V_{\varepsilon_0}(s) \setminus \{s\}) \cap A = \emptyset$, então A tem máximo.

*15. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que $\sup A = \inf B$. Mostre que para qualquer $\varepsilon > 0$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $|a - b| < \varepsilon$.