Cálculo Diferencial e Integral I - 1º Sem. 2020/21

FICHA 1

Revisões: resolução de equações e inequações. Valor absoluto.

AULA PRÁTICA

1. Resolva em $\mathbb{R}$ cada uma das seguintes equações e inequações:

   a) $(x^2 - 3x + 2)(x - 1) \geq 0$,

   b) $x^3 + x \leq 2x^2$,

   c) $\sqrt[3]{x - 1} = \sqrt{x - 1}$,

   d) $\dfrac{x - 1}{x^2 - 1} \leq 1$.

2. Simplifique as seguintes expressões, indicando os respectivos domínios:

   a) $\sqrt{x^2}$,

   b) $(\sqrt{x})^2$,

   c) $2^{x^2} (2^x)^2$,

   d) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$.

3. Escreva as expressões seguintes sem usar módulos:

   a) $|\, x^2 - 4 \,|$,

   b) $|\, 2x + |x - 3| + |3 - x| \,|$.

4. Resolva em $\mathbb{R}$ cada uma das seguintes inequações:

   a) $|x| \geq \dfrac{x}{2} + 1$,

   b) $|x| \leq |x - 2|$.

5. Escreva cada um dos seguintes conjuntos como um intervalo ou uma reunião de intervalos:

   a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^4 - 1}{x^3} \leq x\right\}$,

   b) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1|(x^2 - 4) \geq 0\}$,

   c) $\{x \in \mathbb{R} : (|x| - 1)(x^2 - 4) \leq 0\}$,

   d) $\{x \in \mathbb{R} : |2x + 1| \geq 4\,|x + 1|\,\}$.

6. Indique justificando se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

   a) $\forall_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \quad x > 1 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} < 1$,

   b) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \quad x < y \;\Rightarrow\; x^2 < y^2$,

   c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{y \in \mathbb{R}} \quad y > x$,

   d) $\exists_{y \in \mathbb{R}} \forall_{x \in \mathbb{R}} \quad y > x$.

7. Para cada $a \in \mathbb{R}$ e $R > 0$, define-se a *vizinhança de centro em a com raio R* como o conjunto
$$V_R(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < R\} = \,]\, a - R\,,\, a + R\,[.$$
   Em cada caso, indique o maior $R > 0$ tal que o conjunto A contém a vizinhança de raio R de a:

   a) $A = [0, 1],\ a = \frac{1}{3}$;

   b) $A = [-2, 3] \cup]4, +\infty[,\ a = \frac{2}{3}$.

*8. Prove a *Desigualdade Triangular*: para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se
$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$
   (Sug.: eleve ambos os membros ao quadrado.)

EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

1. Simplifique as seguintes expressões, indicando os respectivos domínios:

   a) $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}}$,

   b) $\dfrac{x+1}{\frac{1}{x}+1}$,

   c) $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{x^2+x}$,

   d) $4^x\dfrac{4}{2^x}$,

   e) $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$,

   f) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$,

   g) $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(x^2\right)$,

   h) $\ln\left(2x^2+2x^{-2}\right)+\ln\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^{-2}}{2}\right)$.

2. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações e inequações:

   a) $x \leq 2-x^2$,

   b) $x^2 \leq 2-x^4$,

   c) $\sqrt[3]{x^2+2x}=2$,

   d) $x=\dfrac{1}{x}$,

   e) $x<\dfrac{1}{x}$,

   f) $e^{x^3}<1$,

   g) $e^{-2x}-2e^{-x} \leq -1$,

   h) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$,

   i) $\ln(x^2-3) \geq 0$,

   j) $x<|x|$,

   k) $|x^2-2| \leq 2$,

   l) $\dfrac{x^4-16}{|x-1|} \leq 0$,

3. Escreva cada um dos seguintes conjuntos como um intervalo ou uma reunião de intervalos:

   a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+1} \leq 1\right\}$,

   b) $\{x \in \mathbb{R} : |3x-4| \geq x^2\}$,

   c) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-1| \leq |x+1|\}$,

   d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2-|x|-2 \leq 0\}$,

   e) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x}{|x|-1} \geq 0\right\}$,

   f) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-|x|}{x-3} \leq 0\right\}$,

4. Indique justificando se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

   a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x^2>x$,

   b) $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \ x^2>0$,

   c) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \ \sqrt{x^2}=x$

   d) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \ x^2<-1 \Rightarrow 1>0$,

   e) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \ 1>0 \Rightarrow x^2<-1$,

   f) $\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \ x>0 \ \Leftrightarrow\ x^{-1}>0$,

   g) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\ \ x<y \ \Rightarrow\ y^{-1}<x^{-1}$,

   h) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x<y<0 \ \Rightarrow\ x^2>y^2$,

   i) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\,\exists_{y\in\mathbb{R}}\ \ y=x^2$,

   j) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\,\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \ y=x^2$.

5. a) Escreva com quantificadores:

i. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, a equação $a + x^2 = 0$ tem solução.
ii. Existe um número real maior do que todos os outros.
iii. Se a distância de x a 1 é maior do que 1 então a distância de x a 0 é maior do que 2.
iv. Para $x, y \in \mathbb{R}$, com $y \neq 0$, $\dfrac{x}{y} > 1$ se, e só se, $x > y$.

b) As afirmações são verdadeiras?

c) Escreva a negação das afirmações acima (com e sem quantificadores).

*6. Prove que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$,

a) $|x| \leq |x - y| + |y|$ (Sug. use a Desigualdade Triangular);

b) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.